

Università di Pisa - Corso di Laurea in Matematica
Scritto d'esame di Analisi Matematica 1

Pisa, 4 Giugno 2015

1. Determinare per quali valori del parametro reale $a > 0$ la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + \sinh n}{a^n + n^3}$$

risulta convergente.

2. Consideriamo la successione definita per ricorrenza da

$$x_{n+1} = -\frac{x_n}{2} + x_n^6.$$

- (a) Studiare il comportamento della successione nel caso $x_0 = -2$.
(b) Studiare il comportamento della successione nel caso $x_0 = -1/2$.

3. Consideriamo la funzione $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \int_x^{x+\sin x} \frac{1}{\log(1+t)} dt.$$

- (a) Calcolare il limite di $f(x)$ per $x \rightarrow +\infty$.
(b) Stabilire se la funzione è uniformemente continua e/o lipschitziana in $(0, +\infty)$.
(c) Determinare se $f(x)$ ammette minimo in $(0, +\infty)$.
(d) Calcolare il limite di $f(x)$ per $x \rightarrow 0^+$.
(e) (Bonus question) Determinare se $f(x)$ ammette massimo in $(0, +\infty)$.

4. Consideriamo il problema di Cauchy

$$u'(t) + \frac{2u(t)}{t} = \cos t, \quad u(\pi) = \alpha.$$

- (a) Determinare, in funzione di α , la soluzione generale del problema, ed il relativo intervallo massimale di esistenza.
(b) Determinare gli eventuali valori di α per cui la soluzione risulta limitata in $(0, +\infty)$.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.