# Parte I

# Testi

# Capitolo 1

# Elementi di Analisi Matematica I

Le prove in questo capitolo corrispondono al prgramma di un primo semestre di analisi matematica e cioè: limiti di funzioni e successioni (in particolare tutti i limiti notevoli), criteri dei due carabinieri, della radice e del rapporto, massimi e minimi limiti, funzioni continue e teoremi correlati (teorema di esistenza degli zeri, etc), infinitesimi, derivate, monotonia, massimi e minimi, studi di funzione, teoremi di Rolle, Lagrange, Cauchy, De l'Hopital, successioni per ricorrenza ...

**17 gennaio 2002**

1. Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(1+2^x)}{\log^2 x}\left(1-\cos\left(\frac{\log x}{\sqrt{x}}\right)\right).$$

2. Si consideri la successione $x_n$ tale che

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n^2 - 5x_n + 9 \\ x_0 = \alpha. \end{cases}$$

   (a) Provare che per ogni $\alpha$ la successione $(x_n)$ è crescente.

   (b) Calcolare $\lim_{n\to+\infty} x_n$ nel caso $\alpha = 0$.

   (c) Dire per quali $\alpha$ la successione è limitata.

3. (a) Mostrare che

$$x - \arctan x \leq \frac{x^3}{3}, \qquad \forall x \geq 0.$$

   (b) Trovare la più piccola costante $C$ tale che

$$x - \arctan x \leq C\, x^3, \qquad \forall x \geq 0.$$

4. (a) Trovare una funzione continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non identicamente nulla tale che:

$$f(0) = 0, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0, \qquad f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

   (b) Sia $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, con $P$ e $Q$ polinomi, una funzione continua e razionale che verifica (1.1). Provare che $Q$ ha grado $\geq 4$.

**7 febbraio 2002**

1. (a) Calcolare $\lim_{x\to 0^+}(\sin x)^x$.

   (b) Calcolare al variare di $\alpha > 0$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(\sin x)^x - 1}{x^\alpha}.$$

2. Si consideri la successione $x_n$ tale che

$$\begin{cases} x_{n+1} = \sqrt[3]{2x_n^2 + 3x_n} \\ x_0 = \alpha. \end{cases}$$

   (a) Sia $0 < \alpha < 3$, provare che la successione $(x_n)$ ammette limite e calcolarlo.

   (b) Che cosa si può dire per $\alpha > 3$?

3. (a) Mostrare che per $C = 2$ si ha:

$$\frac{x}{1+x} \le \arctan x \le \frac{C\,x}{1+x} \qquad \forall x \ge 0. \tag{1.2}$$

   (b) Mostrare che (1.2) non vale per $C < \pi/2$.

   (c) Mostrare che (1.2) non vale per $C = \pi/2$.

4. A partire dalle funzioni reali $f(x)$, $g(x)$, con $f(x) \le g(x)$ si definiscono, per $\alpha \le \beta$, le successioni per ricorrenza $(x_n)$, $(y_n)$:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n) \qquad x_0 = \alpha, \\ y_{n+1} &= g(y_n) \qquad y_0 = \beta. \end{aligned}$$

   (a) Provare che se una (almeno) fra le due funzioni tra $f$ e $g$ è crescente allora:

$$x_n \le y_n \qquad \forall\, n \tag{1.3}$$

   (b) Dire se (1.3) resta vera senza ulteriori ipotesi sulle due funzioni.

**11 giugno 2002**

1. Provare che la funzione
$$f(x) = \frac{x^{\sqrt{x}} - 1}{\log x}$$
è infinitesima per $x \to 0^+$ e calcolarne l'ordine di infinitesimo.

2. Data la regione del piano cartesiano
$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le y \le e^{-x^2}\},$$
mostrare che ogni rettangolo con lati paralleli agli assi contenuto in $D$ ha area $< 1$ e che ne esiste almeno uno con area $> 3/4$.

3. Si consideri la successione $x_n$ definita da
$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{x_n^2 + \sqrt{x_n}}{n} \\ x_1 = 1/2. \end{cases}$$
   (a) Provare che $x_n$ è limitata e calcolarne il limite per $n \to +\infty$.
   (b) Calcolare, se esiste, $\lim_{n \to +\infty} n\, x_n$.

4. Siano $f$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili e strettamente positive, tali che
$$f'(x) < g'(x) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$
   (a) Dimostrare che in generale non si può concludere che
$$f(x) < g(x) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{1.4}$$
   (b) Provare che la (1.4) è vera sotto l'ipotesi aggiuntiva
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

**10 luglio 2002**

1. Dire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha(\sqrt[n]{n+1} - 1) = 0.$$

2. (a) Da uno studio della funzione

$$f(x) = x + \frac{4}{(1+x)^2}$$

dedurre il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = 1$.

   (b) Al variare del parametro $\lambda > 0$ stabilire il numero di soluzioni dell'equazione

$$\lambda^3 x + \frac{4}{(\lambda + x)^2} = 1.$$

3. Si consideri per $0 < \alpha < 1$ la successione $x_n$ definita da

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{x_n - x_n^2}{n + x_n^2} \\ x_1 = \alpha. \end{cases}$$

   (a) Provare che $0 \le x_n \le \alpha$ per ogni $n$.

   (b) Provare che $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$.

   (c) Calcolare $\lim_{n\to+\infty} n\, x_n$.

4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione tale che $f(\mathbb{R}) = \mathbb{Q}$. Provare che $f$ non può essere continua.

**6 settembre 2002**

1. Si consideri la successione $x_n$ definita da
$$\begin{cases} x_{n+1} = \sin(x_n^2) \\ x_0 = 1. \end{cases}$$
   (a) Calcolare $\lim_{n\to+\infty} x_n$.
   (b) Calcolare $\lim_{n\to+\infty} n\, x_n$.

2. Dire per quali valori del parametro $\alpha > 0$ esiste (finito o infinito)
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2(\alpha + \sin x)}{x + \sin x}$$

3. Dimostrare che per ogni $\lambda \neq 0$ l'equazione
$$\lambda x = \frac{\arctan x}{2} - 1$$
ammette un'unica soluzione.

4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione $C^2$ tale che
$$f(0) = 0, \quad f(x) > 0 \quad \text{per } x \neq 0.$$
   (a) Provare che la funzione $g(x) = \dfrac{(f'(x))^2}{f(x)}$, definita per $x \neq 0$, è estendibile con continuità a $x = 0$.
   (b) Dire se lo stesso vale per la funzione $h(x) = \dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}$.

**24 settembre 2002**

1. Calcolare al variare di $a > 0$
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^2 + a^n}.$$

2. Si consideri la successione $x_n$ definita da
$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{x_n^2 + 1}{1 + x_n} \\ x_1 = 2. \end{cases}$$
Provare che la successione $x_n$ è decrescente e calcolarne il limite.

3. Studiare, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, il numero delle soluzioni di
$$\frac{x}{x^2 - 3} + \log x = \lambda \qquad (x > 0),$$
provando in particolare che per $\lambda = -1/2$ l'equazione ha una ed una sola soluzione.

4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da
$$f(x) = \sin x + \phi(x),$$
ove $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione derivabile tale che
$$\phi' \geq 0, \quad \lim_{x\to-\infty} \phi(x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} \phi(x) = +\infty.$$
Calcolare $\inf_{x\in\mathbb{R}} f(x)$ e $\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x)$.

**8 gennaio 2008**

1. (a) Provare che la funzione
$$f(x) = \left[(2^x + x)^{1/x} - 2\right]$$
è infinitesima per $x \to +\infty$.

   (b) Dire per quali $a > 1$ si ha
$$\lim_{x \to +\infty} a^x f(x) = 0.$$

2. Sia $\{x_n\}$ la successione definita per ricorrenza da:
$$x_{n+1} = \sqrt[3]{x_n^2 - x_n + 1}, \quad x_0 = \alpha.$$

   (a) Mostrare che per $\alpha = 2$ si ha $\lim x_n = 1$.

   (b) Calcolare il limite di $\{x_n\}$ al variare di $\alpha > 0$.

3. (a) Mostrare che la funzione
$$f(x) = x - \log(1 + x^2)$$
è bigettiva da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$.

   (b) Dire per quali $\lambda \geq 0$ risulta bigettiva da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ la funzione
$$g(x) = x - \log(1 + \lambda x^2).$$

4. (a) Verificare che se $g \in C^1(\mathbb{R})$ allora la funzione
$$f(x) = g(x^2)$$
è di classe $C^1$ ed esiste $f''(0)$.

   (b) Provare che se $f \in C^2(\mathbb{R})$ è una funzione pari, esiste una qualche funzione $g(t)$ di classe $C^1$ su $\mathbb{R}$ tale che $f(x) = g(x^2)$ (si supponga per semplicità $f(0) = 0$).

**29 gennaio 2008**

1. Calcolare al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{n^5+1} \sin\left(\frac{n}{n^2+1}\right).$$

2. Studiare al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni dell'equazione
$$e^{-1/x}\frac{x}{x+1} = \lambda.$$

3. Sia $\{x_n\}$ la successione definita per ricorrenza da:
$$x_{n+1} = x_n^2 - \frac{5}{2}x_n + \frac{5}{2}, \quad x_0 = \alpha.$$
   (a) Per $\alpha > 5/2$ calcolare $\lim x_n$.
   (b) Provare che se $0 \leq \alpha \leq 5/2$ allora $\{x_n\}$ è limitata.
   (c) Provare che per $\alpha = 3/4$ la successione $\{x_n\}$ ha limite 1.

4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \text{esiste} \qquad \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = \lambda_x \in \mathbb{R}. \tag{1.5}$$
   (a) provare che se $f \in C^1(\mathbb{R})$ allora per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha $\lambda_x = f'(x)$.
   (b) Se $f$ verifica (1.5) possiamo concludere che è una funzione derivabile in tutto $\mathbb{R}$?

**6 giugno 2008**

1. Studiare al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni dell'equazione

$$x \arctan x - (\arctan x)^2 = \lambda.$$

2. Dire per quali $\alpha > 0$ esiste, ed in caso affermativo calcolare

$$\lim_{x \to +\infty} x \sin\left(\frac{x}{1 + x^\alpha}\right).$$

3. Sia $(x_n)$ la successione definita per ricorrenza da

$$x_{n+1} = \frac{x_n + x_n^2}{1 + x_n^2}, \quad x_0 = \alpha.$$

   (a) Provare che per $\alpha = 1/2$ si ha $\lim x_n = 1$.

   (b) Calcolare (se esiste) $\lim x_n$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

4. Si consideri lo spazio di funzioni

$$X = \{P(x)e^x + Q(x)e^{2x} : \quad P \text{ e } Q \text{ polinomi}\}.$$

   (a) Provare che la derivata $D : f \to f'$ definisce un'applicazione iniettiva $D : X \to X$.

   (b) Provare che $D : X \to X$ è anche surgettiva.

**4 luglio 2008**

1. (a) Dimostrare che la funzione definita su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ da
$$f(x) = |x|^{1/|x|}$$
si estende ad una funzione di classe $C^1$ su tutto $\mathbb{R}$.
   (b) Studiare al variare di $\lambda \geq 0$ il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = \lambda$.

2. (a) Sia $\alpha > 0$. Dimostrare, che se $\pi/2 - \alpha > 1$, esiste un $r > 0$ per cui
$$f(x) = \arctan x - \alpha \sin x > 0, \qquad \forall\, x \geq r.$$
   (b) Per tali valori di $\alpha$, calcolare $\lim_{x\to+\infty}(f(x))^x$.

3. Sia $(x_n)$ la successione definita per ricorrenza da
$$x_{n+1} = x_n^3 + x_n - 1, \qquad x_0 = \alpha.$$
   (a) Provare che, se $\alpha > 1$, $(x_n)$ tende a $+\infty$.
   (b) Calcolare (se esiste) $\lim x_n$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

4. Dati due polinomi $P(x)$, $Q(x) \geq 0$ su $\mathbb{R}$, non identicamente nulli, si consideri la funzione
$$f(x) = P(x)\, e^x + Q(x)\, e^{-x}.$$
   (a) Provare che, se $P$ e $Q$ non hanno radici in comune, esiste una costante $c > 0$ tale che
$$f(x) \geq c > 0, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$
   (b) Calcolare $\lim_{x\to\pm\infty} f'(x)/f(x)$.

**8 settembre 2008**

1. Calcolare
$$\lim_{x\to+\infty} \left\{ 2^x \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{x^2} \right\}.$$

2. (a) Provare che la funzione
$$f(x) \;=\; e^x \sin^2 x + e^{-x} \cos^2 x$$
verifica le diseguaglianze
$$e^{-|x|} \;\le\; f(x) \;\le\; e^{\,|x|}.$$
   (b) Calcolare inf e sup di $f(x)$ su $\mathbb{R}$.

3. Calcolare, se esiste, il limite della successione $(x_n)$ definita per ricorrenza da
$$x_{n+1} \;=\; \frac{\arctan(x_n^2)}{x_n}, \qquad x_0 = \alpha > 0.$$

4. Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^1$, con $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$, e supponiamo che
$$f'(x) \neq 0 \;\text{ in ogni punto } x \text{ dove } f(x) = 0. \qquad (*)$$
   (a) Provare che $f$ ha un numero finito $N$ di zeri.
   (b) Provare che $N$ è dispari.
   (c) La conclusione del punto a) resta vera anche in assenza dell'ipotesi $(*)$ ?

**7 gennaio 2010**

1. Calcolare
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2+x^4)+\arctan^2(x+x^2)}{x\log(1+x+x^{10})}.$$

2. Mostrare che esistono valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui l'equazione
$$e^{-x^2}(x^4-2x^3)=\lambda$$
ammette due soluzioni e valori di $\lambda$ per cui ammette quattro soluzioni.

3. Sia $(x_n)$ la successione definita da
$$x_{n+1}=\log(1+x_n^2), \qquad x_0=\alpha>0.$$
   (a) Determinare (se esiste) il limite di $x_n$.
   (b) Calcolare $\lim (x_n)^{1/n}$.

4. (a) Provare che se $P$ è un polinomio (a coefficienti reali) tale che $P(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, allora tutte le radici reali di $P(x)$ hanno molteplicità pari.
   (b) Provare che, nelle stesse ipotesi di (a), se $P$ ha solo radici reali allora esiste un polinomio $Q$ tale che $P=Q^2$.
   (c) Sia $f(x) \equiv P(x)/Q(x) \geq 0$ una funzione razionale definita su tutto $\mathbb{R}$. Se le radici di $P(x)$ sono tutte reali possiamo concludere che esiste una funzione razionale $h$ tale che $f=h^2$?

**28 gennaio 2010**

1. Calcolare al variare di $a > 0$ il limite
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log\left(\frac{n}{2n + a^n}\right).$$

2. Studiare al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni dell'equazione
$$\frac{\log x}{x-2} = \lambda.$$

3. Sia $(x_n)$ la successione definita da
$$x_{n+1} = \frac{x_n^2}{1 + x_n}, \qquad x_0 = 10.$$
   (a) Calcolare $\lim x_n$.
   (b) Calcolare $\lim n!\, x_n$.

4. Data una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, si ponga
$$F(x) = \sin f(x).$$
   (a) Costruire una funzione $f$ non continua tale che $F$ è continua.
   (b) Provare che se $f([a, b]) \subseteq [-\pi/2, \pi/2]$ allora
$$F \text{ continua} \implies f \text{ continua}.$$
   (c) Nelle ipotesi del punto (b), possiamo dire he
$$F \text{ derivabile} \implies f \text{ derivabile?}$$

**18 giugno 2010**

1. Calcolare al variare di $a > 0$ il limite
$$\lim_{n\to+\infty} n \cdot \arctan\left(\frac{2^n}{n+a^n}\right).$$

2. (a) Provare che per ogni $x > 0$ si ha $x^2 - x + \arctan x > 0$.
   (b) Calcolare il limite della successione definita per ricorrenza da
   $$x_{n+1} = x_n^2 + \arctan x_n, \quad x_0 = 1/2.$$

3. Sia $f(x)$ definita da
$$f(x) = \frac{x^2 + |x-1|}{x-2}.$$
   (a) Discutere il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = \lambda$ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.
   (b) Mostrare che per $n$ sufficientemente grande l'equazione $f(x) = n$ ammette un'unica soluzione $x_n \geq \sqrt{n}$.

4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^2$, limitata su tutto $\mathbb{R}$.
   (a) Si può concludere che $\min_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| = 0$?
   (b) Provare che $\inf_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| = 0$.
   (c) Provare che $\min_{x\in\mathbb{R}} |f''(x)| = 0$

**9 luglio 2010**

1. Calcolare
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{1+x+\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{x}}.$$

2. Stabilire per quali $\lambda > 0$ si ha
$$1+\lambda x \geq x^\lambda \qquad \forall x \geq 0.$$

3. Sia $x_n$ la successione definita per ricorrenza da
$$x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2, \qquad x_0 = \alpha.$$
   (a) Nel caso $\alpha = 3/2$ calcolare $\lim x_n$.
   (b) Dimostrare che esiste $\alpha > 0$ per cui $\sum 1/x_n < +\infty$.

4. Sia $f : [0,+\infty[ \to [0,+\infty[$ una funzione continua. Sia $x_n$ la successione definita per ricorrenza da
$$x_{n+1} = f(x_n), \qquad x_0 = \alpha.$$
   (a) Provare che se $f(x) < x$ per ogni $x > 0$ allora $x_n \to 0$ per ogni $\alpha \geq 0$.
   (b) Provare che vale l'implicazione inversa; cioè se $x_n \to 0$ per ogni $\alpha \geq 0$ allora $f(x) < x$ per ogni $x > 0$.
   (c) Trovare una funzione che verifica le ipotesi del punto (a) per cui $\sum x_n = +\infty$ per qualche $\alpha > 0$.

**1 settembre 2010**

1. Calcolare
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3^n}{1+(\log n)^n}, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{3^n}{1+(\log n)^{\sqrt{n}}}.$$

2. Studiare al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni dell'equazione
$$\lambda x - \log x = 1.$$

3. Sia $x_n$ la successione definita per ricorrenza da
$$x_{n+1} = x_n \sin x_n, \qquad x_0 = 1.$$
   (a) Calcolare $\lim x_n$.
   (b) Calcolare $\lim n!\, x_n$.

4. (a) Costruire una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe $C^2$ , tale che
$$f(x) > 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) > 0 \;\; \forall x < 0, \quad f'(x) < 0 \;\; \forall x > 0. \tag{1.6}$$
   (b) Provare che ogni funzione di classe $C^2$ verificante (1.6) ha la derivata seconda che si annulla in almeno due punti.
   (c) Costruire una funzione $f$ verificante (1.6) per cui $f''(x) = 0$ ha esattamente 3 soluzioni.

# Capitolo 2

# Elementi di Analisi Matematica II

Questa sezione contiene esercizi che presuppongono la conoscenza del programma di Elementi di Analisi Matematica I ed inoltre richiedono: sviluppi di Taylor, funzioni uniformemente continue, Lipschitziane e Holderiane, serie numeriche, (in particolare: serie geometriche e armoniche generalizzate, criteri del confronto, del confronto asintotico, della radice e del rapporto, criterio di convergenza assoluta e di Leibniz per qulle di segno variabile), integrali (Teorema fondamentale del calcolo integrale, etc.), principali regole di integrazione (cambi di variabile, intergazione per parti, integrali delle funzioni razionali, etc.), integrali impropri, convergenza uniforme di funzioni.

**11 giugno 2002**

1. Dimostrare che
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\arctan(1/n)}^{1/n} \frac{1+x}{\arctan x}\, dx \;<\; +\infty.$$

2. (a) Calcolare
$$\lim_{n\to+\infty} \int_2^n \frac{\sin x}{x^n}\, dx.$$
   (b) Calcolare al variare di $a > 0$
$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^n \frac{\sin x}{x^n}\, dx.$$

3. Si consideri la successione $x_n$ definita da
$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{x_n^2 + \sqrt{x_n}}{n} \\ x_1 = 1/2. \end{cases}$$
   (a) Provare che $x_n$ è limitata, e calcolarne il limite per $n \to +\infty$.
   (b) Dire se $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ converge.

4. Sia $f : ]0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e $\geq 0$.
   (a) Provare che se $f$ è decrescente, vale l'implicazione
$$\int_0^1 (f(x))^2\, dx < +\infty \quad \Longrightarrow \quad \int_0^1 f(x)\, dx < +\infty. \tag{2.1}$$
   (b) Provare che la (2.1) vale anche senza supporre $f$ decrescente.

**10 luglio 2002**

1. Dire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha
$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{\alpha}(\sqrt[n]{n+1} - 1) < +\infty.$$

2. Sia
$$f(x) = x - \int_0^{x^2} \frac{\sin t}{t}\, dt.$$
   (a) Provare che
   $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$
   (b) Provare che su $[2, +\infty[$ la funzione $f$ è crescente.
   (c) Provare che per $n$ abbastanza grande l'equazione $f(x) = n$ ammette un'unica soluzione $x_n$ e dire se $\sum x_n^{-1}$ converge.

3. Si consideri per $0 < \alpha < 1$ la successione $x_n$ definita da
$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{x_n - x_n^2}{n + x_n^2} \\ x_1 = \alpha. \end{cases}$$
   (a) Provare che $0 \le x_n \le \alpha$ per ogni $n$.
   (b) Provare che $\lim_{n \to +\infty} x_n = 0$ e che $\sum x_n$ converge.
   (c) Dire se $\sum n^n x_n$ converge.

4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^2$ tale che
$$\lim_{x \to +\infty} f''(x) = 0. \tag{2.2}$$
   (a) Mostrare che non è detto che esista finito
   $$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = l \in \mathbb{R}. \tag{2.3}$$
   (b) Provare che (2.3) vale (con $l = 0$) se oltre ad (2.2) si suppone che
   $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

**6 settembre 2002**

1. Calcolare al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2) - x^2 - \alpha x^6}{1-\cos(x^5)}.$$

2. (a) Studiare la convergenza di
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x+x^2}\, dx.$$
   (b) Studiare la convergenza, al variare di $\alpha > 0$ di
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x+x^\alpha}\, dx.$$

3. Si consideri la successione $x_n$ definita da
$$\begin{cases} x_{n+1} = \displaystyle\int_0^{x_n} \frac{\sin(t^2)}{t} dt \\ x_0 = 1. \end{cases}$$
   (a) Provare che $x_n$ è decrescente e calcolare $\lim_{n\to+\infty} x_n$.
   (b) Dire se $\sum 2^{2^n} x_n$ converge.

4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione $C^2$ tale che
$$f(0) = 0, \quad f(x) > 0 \quad \text{per } \ x \neq 0.$$
   (a) Provare che esiste il limite
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2}.$$
   (b) Provare che esiste una funzione $\phi$ derivabile in ogni punto di $\mathbb{R}$ tale che
$$f(x) = \phi^2(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{2.4}$$
   (c) Si può sempre trovare una $\phi$ di classe $C^2$ che verifichi (2.4)?

**24 settembre 2002**

1. Dire se l'integrale
$$\int_0^1 \frac{1-\cos x^2}{x^3-x^4}\,dx$$
è finito o infinito.

2. Si consideri la successione $x_n$ definita da
$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{x_n^2+1}{1+x_n} \\ x_1 = 2. \end{cases}$$
   (a) Provare che la successione $x_n$ è decrescente e calcolarne il limite.
   (b) Provare che $\sum 3^n(x_n-1)$ diverge.

3. Si consideri per $\alpha > 0$ la successione di funzioni
$$f_n(x) = \frac{x^\alpha}{nx + \dfrac{1}{n}}, \qquad (x \geq 0).$$
   (a) Calcolare il limite puntuale della successione per $n \to +\infty$.
   (b) Studiare la convergenza uniforme della successione nell'intervallo $0 \leq x \leq 1$.

4. (a) Provare che ogni funzione $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e periodica ha massimo e minimo in $\mathbb{R}$.
   (b) Sia $\phi$ come sopra e $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile tale che $\psi'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Posto
$$f(x) = \phi(x) + \psi(x),$$
   provare che
$$\inf_{x\in\mathbb{R}} f(x) = \inf_{x\in\mathbb{R}} \phi(x) + \inf_{x\in\mathbb{R}} \psi(x) \quad \text{e} \quad \sup_{x\in\mathbb{R}} f(x) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \phi(x) + \sup_{x\in\mathbb{R}} \psi(x).$$
   (c) Dire se la funzione $f$ di cui sopra ha massimo o minimo in $\mathbb{R}$.

**9 gennaio 2003**

1. Dire se converge la serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^4}{3^{\sqrt{n}}}.$$
2. Si consideri la funzione definita da
$$f(x) = \int_0^x e^t |\arctan t|\, dt.$$
   (a) Dire se $f$ è iniettiva e/o surgettiva.
   (b) Stabilire l'ordine di infinitesimo di $f$ in $x = 0$
3. Dire per quali valori del parametro $\alpha > 0$ converge l'integrale
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x\, |\log x|}{x^4 + x^\alpha}\, dx.$$
4. Siano $a_k, b_k$ due successioni di numeri reali.
   (a) Provare che la successione di funzioni
$$f_k(x) = a_k \sin x + b_k \cos x, \quad 0 \le x \le 1$$
   converge puntualmente verso una qualche funzione $f(x)$ se e solo se converge uniformemente.
   (b) Provare lo stesso risultato per ogni successione del tipo
$$f_k(x) = a_k \phi(x) + b_k \psi(x)$$
   quali che siano le funzioni $\phi(x)$ e $\psi(x)$ continue in $[0, 1]$.

**30 gennaio 2003**

1. Stabilire per quali $\alpha > 0$ la serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{\alpha} \left( \frac{n}{n^2+1} - \sin\left(\frac{1}{n}\right) \right)$$

converge.

2. Studiare la convergenza puntuale ed uniforme in $[0,1]$ e $[1,+\infty[$ della successione di funzioni

$$f_n(x) = xe^{-nx}(1+n^4 x).$$

3. Dire per quali valori del parametro $\alpha > 0$ l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha} + |\log x|}\, dx$$

converge.

4. Siano $f$, $g : [0,+\infty[ \to \mathbb{R}$ due funzioni di classe $C^1$ tali che

$$f(x) \leq g(x) \qquad \forall x \geq 0,$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0.$$

Determinare se le seguenti affermazioni sono vere o false:

(a) esiste $r > 0$ tali che $f'(x) \leq g'(x)$ per ogni $x \geq r$,

(b) esiste una successione $(x_k) \to +\infty$ tale che $f'(x_k) \leq g'(x_k)$ per ogni $k$.

**6 giugno 2008**

1. (a) Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale
$$y'' + 2y' + y = 1 + \cos(2x). \tag{2.5}$$
   (b) Dire se (2.5) ha soluzioni periodiche ed in caso affermativo individuarle tutte.

2. Sia $(x_n)$ la successione definita per ricorrenza da
$$x_{n+1} = \arctan(n + x_n), \quad x_0 = 0.$$
   (a) Calcolare (se esiste) il limite di $x_n$.
   (b) Dire se $\sum \left(\frac{\pi}{2} - x_n\right) < +\infty$.

3. Stabilire per quali $\alpha > 0$ risulta
$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{(x + x^\alpha)(\log x)^\alpha}\, dx < +\infty.$$

4. Sia $f : [0, +\infty[ \to [0, +\infty[$ una funzione di classe $C^1$ decrescente.
   (a) Provare che
$$\int_0^{+\infty} |f'(x)|\, dx < +\infty.$$
   (b) Provare che
$$\int_0^{+\infty} f(x)\cos(x)\, dx \text{ converge } \iff \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

**4 luglio 2008**

1. Dire se
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1-n\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right)<+\infty.$$

2. Sia $(x_n)$ la successione definita per ricorrenza da
$$x_{n+1}=x_n^{\frac{1}{nx_n}},\qquad x_1=2.$$
   (a) Provare che $(x_n)$ è limitata.
   (b) Calcolare $\lim x_n$.
   (c) Dimostrare che $\sum(x_n-1)$ converge.

3. Dire se
$$\int_0^{+\infty}\frac{\log(1+x)}{x^3+x\sqrt{x}}dx<+\infty.$$

4. Data una funzione continua $f:[0,+\infty[\to[0,+\infty[$, si considerino le seguenti proprietà:
$$\int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a) \qquad \forall a,b:\ 0\leq b-a\leq 1; \tag{2.6}$$
$$\int_a^b f(x)\,dx \leq M\sqrt{b-a} \qquad \forall a,b:\ 0\leq b-a\leq 1. \tag{2.7}$$
   (a) Provare che (2.6) vale se e solo se $f(x)\leq M$ per ogni $x$.
   (b) Provare che nessuna delle funzioni $f(x)=x^\alpha$ con $\alpha>0$ verifica (2.7).
   (c) Esistono funzioni non limitate che verificano (2.7)?

**8 settembre 2008**

1. Calcolare
$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos^2 x) + \sin^2 x}{x^4}.$$

2. Trovare la soluzione generale dell'equazione
$$y' + y \sin x \;=\; \sin\, 2x,$$
provando che ogni soluzione $y(x)$ è periodica.

3. Dire per quali $\alpha > 0$ risulta
$$\int_1^{+\infty} \Big(1 - \frac{1}{x}\Big)^{x^\alpha} dx \;<\; +\infty.$$

4. Trovare una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, non identicamente nulla, che verifichi
$$\frac{1}{2}\left[\int_a^x f(s)\, ds - \int_x^b f(s)\, ds\right] \;=\; f'(x), \qquad \forall\, x \in [a, b].$$

**8 gennaio 2009**

1. Stabilire per quali $\alpha > 0$ risulta
$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{n^\alpha}{1+n^2}\right) < +\infty.$$

2. Trovare la soluzione generale dell'equazione
$$y'' - y' = \sin x,$$
quindi determinare se (e quante) soluzioni vi sono che verificano $y(0) = y(\pi) = 0$.

3. Stabilire se
$$\int_0^{+\infty} \frac{\log(e^x + x)}{x + x^4}\, dx < +\infty.$$

4. Data una funzione continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, nulla per $x = 0$ e positiva per $x \neq 0$, poniamo
$$F(x) = f(x) \cdot f\left(\frac{1}{x}\right), \qquad \forall\, x > 0.$$

   (a) Trovare una $f(x)$ tale che
$$\int_0^{+\infty} F(x)\, dx \; < \; +\infty. \tag{$*$}$$

   (b) Eistono polinomi $f(x)$ per cui vale la $(*)$?

**29 gennaio 2009**

1. Stabilire per quali $\alpha \geq 0$ risulta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(\alpha^n)}{1+\alpha^n} < +\infty.$$

2. Si consideri la successione $(x_n)$ definita da

$$x_{n+1} = n\sqrt[n]{x_n}, \qquad x_1 = 2.$$

   (a) Provare che $\inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\} > 0$.

   (b) Calcolare $\lim x_n$.

   (c) Calcolare $\lim (x_n - n)$.

3. Dire per quali $\alpha$, $\beta > 0$ si ha

$$\int_0^1 \frac{\sin(x+x^2)}{x^\alpha + x^\beta}\, dx < +\infty.$$

4. (a) Dimostrare che esiste una funzione $f(x)$ (non identicamente nulla) integrabile su ogni semiretta sinistra $]-\infty, r]$, tale che per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$f'(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt.$$

   (b) Stabilire se si può dire lo stesso per l'equazione

$$f'(x) = -\int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt.$$

**18 giugno 2010**

1. Studiare al variare di $a > 0$ la convergenza della serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \arctan\left(\frac{2^n}{n + a^n}\right).$$

2. Sia $x_n$ la successione definita per ricorrenza da
$$x_{n+1} = \frac{x_n^2}{x_n + n}, \qquad x_1 = 2.$$
   (a) Calcolare il limite $x_n$.
   (b) Calcolare il limite di $(\cos(x_n))^n$.

3. Sia $F(x)$ definita per $x > 0$ da
$$F(x) = \int_x^{2x} \frac{\arctan t}{t} dt.$$
   (a) Provare che $F$ si estende con continuità in $x = 0$.
   (b) Provare che $F$ è monotona.
   (c) Calcolare $\lim_{x\to+\infty} F(x)$.

4. Siano
$$y_1(x) = \cos x, \qquad y_2(x) = \sin x, \qquad y_3(x) = x.$$
   (a) Provare che non esiste nessuna equazione differenziale lineare, omogenea di ordine 2 (cioè $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$) che abbia $y_1$, $y_2$ e $y_3$ tra le sue soluzioni.
   (b) Trovare un'equazione lineare, omogenea a coefficienti costanti che abbia $y_1$, $y_2$ e $y_3$ tra le sue soluzioni.
   (c) Determinare quale è il più piccolo ordine che può avere un'equazione lineare omogenea a coefficienti costanti se ha tra le sue soluzioni $y_1$, $y_2$ e $y_3$.

**1 settembre 2010**

1. Trovare le soluzioni dell'equazione
$$y''' + y' = x$$
che verificano $y(0) = y'(0) = 0$, $y(\pi) = 0$.

2. Studiare la convergenza delle serie
$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{(\log n)^n}, \qquad \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{(\log n)^{\sqrt{n}}}.$$

3. Sia $f$ la funzione definita da
$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\log t} dt.$$
   (a) Provare che $f$ è monotona crescente in $]1, +\infty[$.
   (b) Calcolare $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
   (c) Calcolare $\lim_{x\to1^+} f(x)$.

4. Sia $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ una funzione continua.
   (a) Provare che
$$|f(x)| \le \frac{C}{x} \ \ \forall x \ge 1 \Longrightarrow \int_1^{+\infty} |f(x)|^\alpha \, dx < +\infty \text{ per ogni } \alpha > 1.$$
$$|f(x)| \le \frac{C_n}{x^n} \ \ \forall x \ge 1, \ \ \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \int_1^{+\infty} |f(x)|^\beta \, dx < +\infty \text{ per ogni } \beta > 0.$$
   (b) Mostrare che le implicazioni inverse sono entrambe false.

**14 febbraio 2011**

1. Studiare al variare di $\alpha > 0$ la convergenza della serie
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left( \log \left( \frac{n^2+3}{n^2+1} \right) \right)^{\alpha}.$$

2. Sia $x_n$ la successione definita per ricorrenza da
$$x_{n+1} = \frac{\arctan(\sqrt{n} x_n)}{x_n + n}, \qquad x_1 = 1.$$
   (a) Calcolare il limite $x_n$.
   (b) Stabilire se $\sum x_n$ converge.

3. Stabilire se converge
$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x^2)}{x^2 + x^4}\, dx.$$

4. Sia $\phi : [0, +\infty[ \to ]0, +\infty[$ una funzione continua. Consideriamo l'equazione
$$x = \int_0^{y(x)} \phi(t)\, dt \tag{2.8}$$
   (a) Nel caso $\phi(t) = e^t$ trovare una funzione $y : [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ che verifica (2.8) per ogni $x \geq 0$.
   (b) Provare che in generale esiste $\delta > 0$ ed esiste una ed una sola $y : [0, \delta[ \to \mathbb{R}$ che verifica (2.8) per ogni $0 \leq x < \delta$.
   (c) Provare che la funzione $y$ di cui al punto precedente è derivabile.

**28 febbraio 2011**

1. Studiare la convergenza delle serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{4^n}, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{4^{n^2}}.$$

2. Si consideri l'equazione differenziale

$$y'' + y' - 2y = e^{\alpha x}.$$

   (a) Provare che per $\alpha = 1$ l'equazione non ammette soluzioni limitate in $[0, +\infty[$.

   (b) Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ l'equazione ammette soluzioni limitate in $[0, +\infty[$.

3. Poniamo

$$f(x) = \int_0^x \arctan t \, dt.$$

   (a) Provare che per $x \in [0, 1]$ si ha $x - f(x) \geq 0$.

   (b) Sia $x_n$ la successione definita per ricorrenza da

$$x_{n+1} = f(x_n), \qquad x_0 = \alpha.$$

      i. Nel caso $\alpha = 1$ provare che $x_n \to 0$.

      ii. Provare che esiste qualche $\alpha > 1$ per cui $x_n \to +\infty$.

4. Sia $f : [0, +\infty[ \to [0, +\infty[$ una funzione continua e si consideri la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f(x+n) \, dx \tag{2.9}$$

   (a) Nel caso $f(x) = (1 + x)^{-\alpha}$ con $\alpha > 1$ verificare che la serie in (2.9) converge.

   (b) Provare che in generale

$$\int_0^{+\infty} f(x) \, dx < +\infty \implies \text{(2.9) converge.}$$

   (c) Stabilire se in generale vale anche l'implicazione

$$\int_0^{+\infty} f(x) \, dx < +\infty \implies \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^n f(x+n) \, dx < +\infty$$

# Capitolo 3

# Elementi di Analisi Matematica

Gli esercizi di questa sezione presuppongono la conoscenza di tutto il programma di un corso annuale di base di Analisi Matematica, e cioè l'unione delle conoscenze richieste nei precedenti capitoli a cui si rimanda per una lista dettagliata.

**11 giugno 2002**

1. Calcolare, al variare del parametro $\alpha > 0$
$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{n^2} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n .$$

2. Dimostrare che
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\arctan(1/n)}^{1/n} \frac{1+x}{\arctan x}\,dx \ < \ +\infty.$$

3. Si consideri la successione $x_n$ definita da
$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{x_n^2 + \sqrt{x_n}}{n} \\ x_1 = 1/2. \end{cases}$$
   (a) Provare che $x_n$ è limitata e calcolarne il limite per $n \to +\infty$.
   (b) Dire se $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ converge.

4. Sia $f : ]0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua $\geq 0$.
   (a) Provare che se $f$ è decrescente, vale l'implicazione
$$\int_0^1 (f(x))^2\,dx < +\infty \quad \Longrightarrow \quad \int_0^1 f(x)\,dx < +\infty. \tag{3.1}$$
   (b) Provare che (3.1) vale anche senza supporre $f$ decrescente.

**10 luglio 2002**

1. Dire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha
$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha(\sqrt[n]{n+1}-1)=0.$$

2. (a) Da uno studio della funzione
$$f(x)=x+\frac{4}{(1+x)^2}$$
dedurre il numero di soluzioni dell'equazione $f(x)=1$.

   (b) Al variare del parametro $\lambda>0$ stabilire il numero di soluzioni dell'equazione
$$\lambda^3 x+\frac{4}{(\lambda+x)^2}=1.$$

3. Sia
$$f(x)=x-\int_0^{x^2}\frac{\sin t}{t}\,dt.$$

   (a) Provare che
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.$$

   (b) Provare che su $[2,+\infty[$ la funzione $f$ è crescente.

   (c) Provare che per $n$ abbastanza grande l'equazione $f(x)=n$ ammette un'unica soluzione $x_n$ e dire se $\sum x_n^{-1}$ converge.

4. Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione di classe $C^2$ tale che
$$\lim_{x\to+\infty} f''(x)=0. \tag{3.2}$$

   (a) Mostrare che non è detto che esista finito
$$\lim_{x\to+\infty} f'(x)=l\in\mathbb{R}. \tag{3.3}$$

   (b) Provare che (3.3) vale (con $l=0$) se oltre ad (3.2) si suppone che
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0.$$

**6 settembre 2002**

1. Calcolare al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2) - x^2 - \alpha x^6}{1-\cos(x^5)}.$$

2. Dimostrare che per ogni $\lambda \neq 0$ l'equazione
$$\lambda x = \frac{\arctan x}{2} - 1$$
ammette un'unica soluzione.

3. Si consideri la successione $x_n$ definita da
$$\begin{cases} x_{n+1} = \displaystyle\int_0^{x_n} \frac{\sin(t^2)}{t} dt \\ x_0 = 1. \end{cases}$$
   (a) Provare che $x_n$ è decrescente e calcolare $\lim_{n\to+\infty} x_n$.
   (b) Dire se $\sum 2^{2^n} x_n$ converge.

4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione $C^2$ tale che
$$f(0) = 0, \quad f(x) > 0 \quad \text{per } \; x \neq 0.$$
   (a) Provare che esiste il limite
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2}.$$
   (b) Provare che esiste una funzione $\phi$ derivabile in ogni punto di $\mathbb{R}$ tale che
$$f(x) = \phi^2(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{3.4}$$
   (c) Si può sempre trovare una $\phi$ di classe $C^2$ che verifichi (3.4)?

**24 settembre 2002**

1. Studiare, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, il numero delle soluzioni di

$$\frac{x}{x^2-3} + \log x = \lambda \qquad (x > 0),$$

provando in particolare che per $\lambda = -1/2$ l'equazione ha una ed una sola soluzione.

2. Si consideri la successione $x_n$ definita da

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{x_n^2+1}{1+x_n} \\ x_1 = 2. \end{cases}$$

   (a) Provare che la successione $x_n$ è decrescente e calcolarne il limite.

   (b) Provare che $\lim_{n\to+\infty} n(x_n - 1) = 0$.

3. Dire se l'integrale

$$\int_0^1 \frac{1-\cos x^2}{x^3 - x^4}\, dx$$

è finito o infinito.

4. (a) Provare che ogni funzione $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e periodica ha massimo e minimo in $\mathbb{R}$.

   (b) Sia $\phi$ come sopra e $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile tale che $\psi'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Posto

$$f(x) = \phi(x) + \psi(x),$$

   provare che

$$\inf_{x\in\mathbb{R}} f(x) = \inf_{x\in\mathbb{R}} \phi(x) + \inf_{x\in\mathbb{R}} \psi(x) \quad \text{e} \quad \sup_{x\in\mathbb{R}} f(x) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \phi(x) + \sup_{x\in\mathbb{R}} \psi(x).$$

   (c) Dire se la funzione $f$ di cui sopra ha massimo o minimo in $\mathbb{R}$.

**9 gennaio 2003**

1. Dire se converge la serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^4}{3^{\sqrt{n}}}.$$

2. Si consideri la funzione definita da
$$f(x) = \int_0^x e^t |\arctan t|\, dt.$$
   (a) Dire se $f$ è iniettiva e/o surgettiva.
   (b) Stabilire l'ordine di infinitesimo di $f$ in $x = 0$

3. Si consideri la successione $x_n$ definita da
$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{\arctan x_n}{n+1} \\ x_1 = 100 \end{cases}$$
   (a) Calcolare $\lim_{n\to+\infty} x_n$.
   (b) Calcolare $\lim_{n\to+\infty} n^n x_n$.

4. Siano $a_k, b_k$ due successioni di numeri reali.
   (a) Provare che la successione di funzioni
$$f_k(x) = a_k \sin x + b_k \cos x, \quad 0 \le x \le 1$$
   converge puntualmente verso una qualche funzione $f(x)$ se e solo se converge uniformemente.
   (b) Provare lo stesso risultato per ogni successione del tipo
$$f_k(x) = a_k\phi(x) + b_k\psi(x)$$
   quali che siano le funzioni $\phi(x)$ e $\psi(x)$ continue in $[0, 1]$.

**30 gennaio 2003**

1. Calcolare, al variare di $\alpha > 0$:

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha \left(\frac{n}{n^2+1} - \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

2. Trovare la migliore costante $C$ tale che

$$x - C\log(1+x) \geq 0 \qquad \forall x \geq 0.$$

3. Dire per quali valori del parametro $\alpha > 0$ l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha + |\log x|}\,dx$$

converge.

4. Siano $f,\ g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ due funzioni di classe $C^1$ tali che

$$f(x) \leq g(x) \qquad \forall x \geq 0,$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0.$$

Determinare se le seguenti affermazioni sono vere o false:

(a) esiste $r > 0$ tali che $f'(x) \leq g'(x)$ per ogni $x \geq r$,

(b) esiste una successione $(x_k) \to +\infty$ tale che $f'(x_k) \leq g'(x_k)$ per ogni $k$.

**10 giugno 2004**

1. Calcolare l'ordine di infinitesimo per $x \to 0$ della funzione

$$f(x) \ = (\arctan \sin x)^2 - \alpha\, x^2$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.

2. Sia $(x_n)$ la successione definita da

$$x_{n+1} = \sqrt[n]{1 + x_n}\ , \qquad x_1 = 5.$$

(a) Provare che $(x_n)$ é limitata.

(b) Provare che $\lim_{n \to +\infty} x_n = 1$.

(c) Calcolare $\lim_{n \to +\infty} n(x_n - 1)$.

3. (a) Dimostrare che

$$\int_0^1 \frac{\log^2 x}{x - x^2}\, dx \ = +\infty.$$

(b) Dire se

$$\int_0^1 \frac{\log^2 x}{\sqrt{x - x^2}}\, dx \ < +\infty.$$

4. Data una funzione continua $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $\phi(x) \neq 0$ per $x \neq 0$, sia

$$f(x) = \frac{x\, \phi(x)}{\displaystyle\int_0^x \phi(t)\, dt} \qquad \text{per} \quad x \neq 0.$$

(a) Provare che la funzione $f(x)$ é ben definita su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e si estende con continuitá su tutto $\mathbb{R}$ quando $\phi \in C^1(\mathbb{R})$ e $\phi'(0) \neq 0$.

(b) Provare che la stessa conclusione di (a) resta valida se si suppone che la $\phi(x)$ sia solo derivabile in $x = 0$ con $\phi'(0) \neq 0$.

(c) Studiare il caso in cui $\phi'(0) = 0$, mostrando in particolare che si puó costruire una $\phi(x)$ di classe $C^\infty$ per cui $f(x)$ non ha limite finito (per $x \to 0$).

**6 luglio 2004**

1. Dire per quali $\alpha \geq -1$ risulta convergente la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(\alpha^n)}{n}.$$

2. Si consideri la disequazione
$$x - \log(1 + cx + x^2) \geq 0, \qquad \forall\, x \geq 0. \tag{3.5}$$
   (a) Provare che la (3.5) é vera quando $c = 0$, mentre é falsa per $c > 1$.

   (b) Dire per quali valori di $c \in [0, 1]$ la diseguaglianza (3.5) é vera.

3. Sia $(x_n)$ la successione definita da
$$x_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{x_n}, \qquad x_1 = \alpha.$$
   (a) Provare che, nel caso $\alpha = 1$, si ha $x_n \leq n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

   (b) Sempre nel caso $\alpha = 1$, calcolare $\lim x_n$.

   (c) Dire se esiste qualche $\alpha > 1$ per cui $\lim x_n = +\infty$.

4. (a) Dimostrare che
$$I := \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx \;\geq\; \frac{1}{2}.$$
   (b) Provare che $I \geq 1$, e piú in generale che, per ogni funzione continua e concava $\varphi(x) \geq 0$ sull'intervallo $[0, a]$ vale la stima
$$\int_0^a \frac{\varphi(x)}{x}\, dx \;\geq\; M = \max_{0 \leq x \leq a} \varphi(x). \tag{3.6}$$
   (c) Dire per quali funzioni continue e concave $\varphi : [0, a] \to \mathbb{R}^+$ vale l'eguaglianza in (3.6).

**3 settembre 2004**

1. (a) Tracciare un grafico della funzione $xe^{1/x}$.

   (b) Stabilire, al variare del parametro $\lambda > 0$, il numero delle soluzioni dell'equazione

$$xe^{\frac{1}{\lambda x}} = \lambda.$$

2. Sia $(x_n)$ la successione definita da

$$x_{n+1} = n \arctan x_n^2 \, , \qquad x_2 = \alpha > 0.$$

   (a) Provare che, nel caso $\alpha = 1$, si ha $x_n \to +\infty$.

   (b) Provare che, nel caso $\alpha = 1$, $(x_n)$ è crescente.

   (c) Dimostrare che esiste $\overline{\alpha} > 0$ per cui $x_n \to +\infty$ se e solo se $\alpha > \overline{\alpha}$.

3. (a) Calcolare per $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$

$$\lim_{x \to +\infty} \int_x^{x+x^\alpha} \frac{\arctan t}{\sqrt{t}} \, dt.$$

   (b) Calcolare lo stesso limite per $\alpha = 1/2$.

4. Data una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ continua tale che

$$\int_0^{+\infty} f(t) \, dt < \infty,$$

   si ponga per $x \neq 0$

$$\phi(x) = \int_0^{\frac{1}{x^2}} f(t) \, dt.$$

   (a) Provare che $\phi$ ammette un'estensione $\hat{\phi}$ continua, ma in generale non derivabile.

   (b) Provare che se $\lim_{t \to +\infty} t^2 f(t) = 0$, allora $\hat{\phi} \in C^1(\mathbb{R})$.

   (c) Supponiamo $f \in C^1$ e $\lim_{t \to +\infty} t^n f(t) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Possiamo concludere $\hat{\phi} \in C^2(\mathbb{R})$?

**24 settembre 2004**

1. Sia
$$f(x) = \left(\frac{x+2}{x-2}\right)^x - \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{2x}.$$
   (a) Provare che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
   (b) Calcolare $\lim_{x\to+\infty} xf(x)$.

2. Sia $(x_n)$ la successione definita da
$$x_{n+1} = \sqrt{x_n^2 - x_n + 1}\,, \qquad x_0 = \alpha > 1.$$
   (a) Calcolare $\lim_{n\to+\infty} x_n$.
   (b) Dire se la serie $\sum(x_n - 1)$ converge.
   (c) Calcolare $\lim_{n\to+\infty} x_n^n$.

3. Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$
$$\int_1^{+\infty} \frac{\log(1+e^x)}{x^2 + x^\alpha}\,dx < +\infty.$$

4. (a) Sia $f \in C^2(\mathbb{R})$ tale che
$$f''(x) \geq \delta > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$
   Mostrare che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.
   (b) Sia $f \in C^2(\mathbb{R})$ tale che
$$f''(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$
   Mostrare che $\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x) = +\infty$.
   (c) Sia $k > 2$ e sia $f \in C^k(\mathbb{R})$ tale che
$$f^{(k)}(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$
   Dire se si ha ancora $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| = +\infty$.

**20 gennaio 2005**

1. Si consideri la successione

$$a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}.$$

   (a) Provare che $a_n$ è limitata.

   (b) Provare che $a_n$ è monotona.

   (c) Provare che $a_n \to \log 2$.

2. Si consideri l'equazione

$$e^{-\frac{1}{x}}(x^3 - 2x) = \lambda.$$

   (a) Provare che per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, l'equazione ha almeno una soluzione.

   (b) Studiare il numero delle soluzioni al variare di $\lambda$.

3. Dire se si ha

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan \sqrt{x}}{x + x^3}\, dx < +\infty.$$

4. Si consideri la successione definita per ricorrenza da

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad x_0 = 1,$$

   dove $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione non negativa di classe $C^1$.

   (a) Provare che se $\sum x_n < +\infty$ allora $f(0) = 0$ e $|f'(0)| \leq 1$.

   (b) Provare che se $f(0) = 0$ e $|f'(x)| \leq c < 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ allora $\sum x_n < +\infty$.

   (c) La conclusione in (b) resta valida se si suppone solo $f(0) = 0$ e $|f'(0)| < 1$ ?

**3 febbraio 2005**

1. Dire per quali $a \geq 0$ si ha
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(a + \frac{1}{n}\right)^n < +\infty.$$

2. Dire per quali $\lambda \geq 0$ la funzione
$$f(x) = x - \log(1 + x + \lambda x^2)$$
induce un'applicazione biunivoca da $[0, +\infty[$ in $[0, +\infty[$.

3. Dire per quali $\alpha > 0$ si ha
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{e^{x^\alpha} - 1}\, dx < +\infty.$$

4. Sia $f : [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ una funzione continua decrescente tale che $f(x) > 0$ per ogni $x \geq 0$, e sia $(x_n)$ la successione definita da
$$x_{n+1} = x_n + f(x_{n+1}), \quad x_0 = 0.$$
   (a) Provare che $x_n \to +\infty$.
   (b) Provare che $\sum f(x_n) = +\infty$.
   (c) Provare che $\sum f(x_n)^2 < +\infty$ se e solo se $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\, dx < +\infty$.

**9 giugno 2006**

1. Stabilire per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ l'equazione
$$e^{1/x}\frac{x^2}{1+x} = \lambda$$
ammette soluzioni.

2. Si consideri la successione definita per ricorrenza da
$$x_{n+1} = \frac{1+2x_n}{2+x_n^2}, \qquad x_0 = 1/2.$$
   (a) Mostrare che $(x_n)$ ammette limite finito $l$ e calcolarlo.
   (b) Dire se converge la serie
$$\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n - l|.$$

3. (a) Mostrare che per ogni $n \geq 0$ si ha
$$a_n = \int_0^1 \frac{\arctan(nx)}{x+x^2} < +\infty.$$
   (b) Mostrare che $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

4. Sia $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ una funzione continua, non negativa ($f(x) \geq 0$) tale che
$$\lim_{n\to+\infty} \int_n^{n^2} f(x)\,dx = 0 \tag{3.7}$$
   (a) Verificare che la funzione $f(x) = x^{-\alpha}$ verifica (3.7) se e solo se $\alpha > 1$.
   (b) Mostrare che
$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty \Longrightarrow (3.7).$$
   (c) Dire se
$$(3.7) \Longrightarrow \int_1^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty.$$

**7 luglio 2006**

1. Stabilire per quali $\lambda \geq 0$ la funzione
$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} - \lambda \arctan x$$
è monotona su $\mathbb{R}$.

2. Si consideri la successione definita per ricorrenza da
$$x_{n+1} = \log(1 + n x_n), \qquad x_1 = 4.$$
   (a) Mostrare che $x_n \to +\infty$.
   (b) Mostrare che esistono $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ tali che
$$c_1 \log n \leq x_n \leq c_2 \log n \qquad \forall n \geq 3.$$
   (c) Calcolare $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{\log n}$.

3. (a) Provare che
$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x\sqrt{x}} dx < +\infty.$$
   (b) Dire per quali $\alpha \geq 0$
$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x\sqrt{x}|\log x|^\alpha} dx < +\infty.$$

4. (a) Costruire una funzione $f : [0, +\infty[ \to [0, +\infty[$ continua non identicamente nulla tale che:
$$\exists x \geq 0 \quad \text{tale che} \quad \int_0^{+\infty} f(t)\, dt = f(x). \tag{3.8}$$
   (b) Provare che se $f : [0, +\infty[ \to [0, +\infty[$ è continua e decrescente la (3.8) vale se e solo se
$$f(0) \geq \int_0^{+\infty} f(t)\, dt.$$
   (c) Caratterizzare le funzioni $f : [0, +\infty[ \to [0, +\infty[$ continue (anche non decrescenti) per cui vale la (3.8).

**5 settembre 2006**

1. (a) Dimostrare che esiste $c \geq 0$ tale che
$$0 \leq x - \log(1+x) \leq cx \qquad \forall x \geq 0. \tag{3.9}$$
   (b) Trovare la migliore costante per cui vale la (3.9).

2. Calcolare al variare di $a > 0$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^{n\log n}}{n!}.$$

3. Si consideri per $\alpha \geq 1$
$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{t\sin t}{1+t^\alpha}\,dt.$$
   (a) Provare che per $\alpha > 2$ tale limite esiste ed è finito.
   (b) Provare che per $\alpha = 1$ il limite non esiste.
   (c) Studiare il caso $1 < \alpha \leq 2$.

4. Sia $f : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ una funzione decrescente, continua e strettamente positiva ($f(x) > 0$ per ogni $x > 0$).
   (a) Nel caso $f(x) = e^{-x^2}$, calcolare
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_x^{x+1} f(t)\,dt}{f(x)}.$$
   (b) Provare che
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_x^{x+1} f(t)\,dt}{f(x)} = L < 1 \Longrightarrow \int_1^{+\infty} f(t)\,dt < +\infty.$$
   (c) La conclusione del punto precedente vale ancora nel caso $L = 1$?

**19 settembre 2006**

1. Data la funzione

$$f(x) = x \sin x + \log(1 + e^x),$$

   (a) calcolare $\sup_{x \geq 0} f(x)$,

   (b) dimostrare che $f(x) > 0$ per ogni $x \geq 0$, e calcolare $\inf_{x \geq 0} f(x)$.

2. Calcolare $\lim x_n$ dove $(x_n)$ è la successione definita da

$$x_{n+1} = \frac{1 + n x_n^2}{1 + x_n}, \qquad x_0 = 0.$$

3. Data la funzione

$$f(x) = \frac{x}{1 + x^2 \log x}$$

   dimostrare che

$$\int_1^{+\infty} f(x)\, dx = +\infty, \qquad \lim_{n \to +\infty} \int_n^{n+1/n} f(x)\, dx = 0.$$

4. Sia $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ una funzione continua e non negativa tale che

$$\int_0^{+\infty} f(x)\, dx < +\infty.$$

   (a) Mostrare con un esempio che in generale non si ha

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0. \qquad (*)$$

   (b) Provare che la $(*)$ è verificata qualora si supponga che la $f(x)$ é una funzione globalmente lipschitziana in $\mathbb{R}^+$.

   (c) Mostrare che, anche se $f$ è globalmente lipschitziana, in generale non si ha

$$\lim_{x \to +\infty} x f(x) = 0.$$

**18 gennaio 2007**

1. Stabilire il numero di soluzioni dell'equazione

$$x^2 e^x = \lambda(3x^2 - 1)$$

   al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. Si consideri la successione definita per ricorrenza da

$$x_{n+1} = \frac{x_n + 21}{11 - x_n}, \qquad x_0 = \alpha.$$

   (a) Per $\alpha = 2$ mostrare che $(x_n)$ è ben definita, ha limite e calcolare tale limite.

   (b) Mostrare che per $\alpha < 7$ la successione $(x_n)$ è ben definita, mentre esistono infiniti valori di $\alpha \in (7, 11)$ per cui la successione non è definita per ogni $n$.

3. Sia

$$f(x) = \frac{\arctan x}{x + \sqrt{x}}.$$

   (a) Provare che $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx = +\infty$.

   (b) Calcolare $\lim_{t\to+\infty} \displaystyle\int_t^{2t} f(x)\,dx$.

4. Sia $f : [1, +\infty[ \to [0, +\infty[$ una funzione continua e non negativa.

   (a) Dimostrare che $f(x) = x^{-\alpha}$ con $0 < \alpha \le 1$ verifica la proprietà

$$\forall (a_n) \to +\infty,\ \exists (b_n) \text{ tale che: } \left[\, b_n \ge a_n \ \text{ e } \int_{a_n}^{b_n} f(x)\,dx \ge 1,\ \forall n. \right] \tag{3.10}$$

   (b) Provare più in generale che, se $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$ allora vale la (3.10).

   (c) Vale anche l'inversa dell'implicazione del punto (b)?

**15 febbraio 2007**

1. (a) Provare che la serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n^3+2}{n^5+n}$$
converge.

   (b) Stabilire per quali $\alpha > 0$ la serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n^\alpha+2}{n^5+n}$$
converge.

2. Dimostrare che la funzione
$$f(x)=\frac{\sin(x+x^3)-\arctan(x+x^3)}{\log(\cos x)}$$
è infinitesima per $x \to 0$ e calcolarne l'ordine di infinitesimo.

3. Sia
$$f(x)=\int_x^{x^2}\frac{\arctan t}{1+t^4}\,dt.$$

   (a) Provare che $f$ ha un massimo locale per $x = 0$.

   (b) Calcolare i limiti di $f(x)$ per $x \to \pm\infty$ e mostrare che $f$ ha massimo e minimo assoluto in $\mathbb{R}$.

   (c) Mostrare che $-1 \leq f(x) \leq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

4. Siano $\phi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzioni continue.

   (a) Dimostrare che se $\phi$ e $\psi$ sono uniformemente continue allora $\phi \circ \psi$ è uniformemente continua.

   (b) Trovare $\phi$ uniformemente continua e $\psi$ continua per cui $\phi \circ \psi$ e $\psi \circ \phi$ non sono uniformemente continue.

   (c) Supponiamo che $\phi$ e $\psi$ siano limitate e che $\phi$ sia uniformemente continua. Si può concludere che $\psi \circ \phi$ è uniformemente continua? E che $\phi \circ \psi$ è uniformemente continua?

**6 giugno 2008**

1. Studiare al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni dell'equazione
$$x \arctan x - (\arctan x)^2 = \lambda.$$

2. (a) Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale
$$y'' + 2y' + y = 1 + \cos(2x). \tag{3.11}$$
   (b) Dire se (3.11) ha soluzioni periodiche ed in caso affermativo individuarle tutte.

3. Stabilire per quali $\alpha > 0$ risulta
$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{(x + x^\alpha)(\log x)^\alpha}\, dx < +\infty.$$

4. Sia $f : [0, +\infty[ \to [0, +\infty[$ una funzione di classe $C^1$ decrescente.
   (a) Provare che
$$\int_0^{+\infty} |f'(x)|\, dx < +\infty.$$
   (b) Provare che
$$\int_0^{+\infty} f(x) \cos(x)\, dx \text{ converge } \iff \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

**4 luglio 2008**

1. (a) Dimostrare che la funzione
$$f(x) = |x|^{1/|x|} \qquad (x \neq 0),$$
si estende ad una funzione di classe $C^1$ su $\mathbb{R}$.

   (b) Studiare al variare di $\lambda \geq 0$ il numero di soluzioni di $f(x) = \lambda$.

2. Sia $(x_n)$ la successione definita per ricorrenza da
$$x_{n+1} = x_n^3 + x_n - 1, \quad x_0 = \alpha.$$
   (a) Provare che per $\alpha > 1$ si ha $\lim x_n = +\infty$.

   (b) Calcolare (se esiste) $\lim x_n$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

3. Dire se
$$\int_0^{+\infty} \frac{\log(1+x)}{x^3 + x\sqrt{x}} dx < +\infty.$$

4. Data una funzione continua $f : [0, +\infty[ \to [0, +\infty[$, si considerino le seguenti proprietà:
$$\int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a) \qquad \forall a, b:\ 0 \leq b - a \leq 1; \tag{3.12}$$
$$\int_a^b f(x)\,dx \leq M\sqrt{b-a} \qquad \forall a, b:\ 0 \leq b - a \leq 1. \tag{3.13}$$
   (a) Provare che (3.12) vale se e solo se $f(x) \leq M$ per ogni $x$.

   (b) Provare che nessuna delle funzioni $f(x) = x^\alpha$ con $\alpha > 0$ verifica (3.13).

   (c) Esistono funzioni non limitate che verificano (3.13)?

**8 settembre 2008**

1. Calcolare
$$\lim_{x\to+\infty} \left\{ 2^x \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{x^2} \right\}.$$

2. (a) Provare che la funzione
$$f(x) \;=\; e^x \sin^2 x + e^{-x} \cos^2 x$$
verifica le diseguaglianze
$$e^{-|x|} \;\le\; f(x) \;\le\; e^{\,|x|}.$$
   (b) Calcolare inf e sup di $f(x)$ su $\mathbb{R}$.

3. Trovare la soluzione generale dell'equazione
$$y' + y \sin x \;=\; \sin 2x,$$
provando che ogni soluzione $y(x)$ è periodica.

4. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^1$, con $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$, e supponiamo che
$$f'(x) \neq 0 \;\text{ in ogni punto } x \text{ dove } f(x) = 0. \tag{$*$}$$
   (a) Provare che $f$ ha un numero finito $N$ di zeri.
   (b) Provare che $N$ è dispari.
   (c) La conclusione del punto a) resta vera anche in assenza dell'ipotesi $(*)$?

**8 gennaio 2009**

1. Determinare, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione
$$\log\left(1 + \frac{2x}{1+x^2}\right) = \lambda.$$

2. Sia $(x_n)$ la successione definita da
$$x_{n+1} = \frac{x_n^2}{1+x_n^2}, \qquad x_0 = \alpha > 0.$$
   (a) Calcolare $\lim x_n$.
   (b) Dire se $\sum x_n$ converge.

3. Stabilire se
$$\int_0^{+\infty} \frac{\log(e^x + x)}{x + x^4}\, dx < +\infty.$$

4. Data una funzione continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, nulla per $x = 0$ e positiva per $x \neq 0$, poniamo
$$F(x) = f(x) \cdot f\left(\frac{1}{x}\right), \qquad \forall\, x > 0.$$
   (a) Trovare una $f(x)$ tale che
$$\int_0^{+\infty} F(x)\, dx \;<\; +\infty. \tag{$*$}$$
   (b) Eistono polinomi $f(x)$ per cui vale la $(*)$?

**29 gennaio 2009**

1. Calcolare
$$\lim_{x\to 0} \frac{(x+3)^x - (x+2)^x}{x}.$$

2. Si consideri la successione $(x_n)$ definita da
$$x_{n+1} = n\sqrt[n]{x_n}, \qquad x_1 = 2.$$
   (a) Provare che $\inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\} > 0$.
   (b) Calcolare $\lim x_n$.
   (c) Calcolare $\lim (x_n - n)$.

3. (a) Calcolare, per $0 < \alpha < 2$, il limite
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\int_x^{2x} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt.$$
   (b) Calcolare
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\int_x^{2x} \frac{\sin t}{t^2} dt.$$

4. (a) Dimostrare che esiste una funzione $f(x)$ (non identicamente nulla) integrabile su ogni semiretta sinistra $]-\infty, r]$, tale che per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha
$$f'(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt.$$
   (b) Stabilire se si può dire lo stesso per l'equazione
$$f'(x) = -\int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt.$$

**18 giugno 2010**

1. Calcolare al variare di $a > 0$ il limite
$$\lim_{n\to+\infty} n \cdot \arctan\left(\frac{2^n}{n+a^n}\right).$$

2. Sia $x_n$ la successione definita per ricorrenza da
$$x_{n+1} = \frac{x_n^2}{x_n+n}, \qquad x_1 = 2.$$
   (a) Calcolare il limite $x_n$.
   (b) Calcolare il limite di $(\cos(x_n))^n$.

3. Sia $f(x)$ definita da
$$f(x) = \frac{x^2+|x-1|}{x-2}.$$
   (a) Discutere il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = \lambda$ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.
   (b) Mostrare che per $n$ sufficientemente grande l'equazione $f(x) = n$ ammette un'unica soluzione $x_n \geq \sqrt{n}$.

4. Siano
$$y_1(x) = \cos x, \qquad y_2(x) = \sin x, \qquad y_3(x) = x.$$
   (a) Provare che non esiste nessuna equazione differenziale lineare, omogenea di ordine 2 (cioè $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$) che abbia $y_1$, $y_2$ e $y_3$ tra le sue soluzioni.
   (b) Trovare un'equazione lineare, omogenea a coefficienti costanti che abbia $y_1$, $y_2$ e $y_3$ tra le sue soluzioni.
   (c) Determinare quale è il più piccolo ordine che può avere un'equazione lineare omogenea a coefficienti costanti se ha tra le sue soluzioni $y_1$, $y_2$ e $y_3$.

**9 luglio 2010**

1. Calcolare al variare di $a \in \mathbb{R}$ l'ordine di infinitesimo e la parte principale per $x \to 0$ di
$$\sin(x + ax^2) - \log(1 + x + x^2).$$

2. Sia $x_n$ la successione definita per ricorrenza da
$$x_{n+1} = 2^{x_n/n}, \qquad x_2 = \alpha.$$
   (a) Nel caso $\alpha = 2$ provare che $x_n \to 1$.
   (b) Stabilire se esiste $\alpha > 0$ per cui $x_n \to +\infty$.

3. (a) Provare che
$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{\log x} dx = +\infty.$$
   (b) Stabilire se converge
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \int_n^{n+1/n} \frac{1}{\log x} dx.$$

4. (a) Stabilire per quali valori dei parametri $a$ e $b$ in $\mathbb{R}$ l'equazione differenziale
$$y'' + ay' + by = 0$$
   ammette qualche soluzione non limitata.
   (b) Stabilire per quali valori dei parametri $a$, $b$, $c$ in $\mathbb{R}$ le soluzioni dell'equazione differenziale
$$y''' + ay'' + by' + cy = 0$$
   sono tutte periodiche di periodo $2\pi$.

**9 luglio 2010**

1. Calcolare al variare di $a \in \mathbb{R}$ l'ordine di infinitesimo e la parte principale per $x \to 0$ di
$$\sin(x + ax^2) - \log(1 + x + x^2).$$
2. Stabilire per quali $\lambda > 0$ si ha
$$1 + \lambda x \geq x^\lambda \qquad \forall x \geq 0.$$
3. (a) Provare che
$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{\log x} dx = +\infty.$$
   (b) Stabilire se converge
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \int_n^{n+1/n} \frac{1}{\log x} dx.$$
4. Sia $f : [0, +\infty[ \to [0, +\infty[$ una funzione continua. Sia $x_n$ la successione definita per ricorrenza da
$$x_{n+1} = f(x_n), \qquad x_0 = \alpha.$$
   (a) Provare che se $f(x) < x$ per ogni $x > 0$ allora $x_n \to 0$ per ogni $\alpha \geq 0$.
   (b) Provare che vale l'implicazione inversa; cioè se $x_n \to 0$ per ogni $\alpha \geq 0$ allora $f(x) < x$ per ogni $x > 0$.
   (c) Trovare una funzione che verifica le ipotesi del puto (a) per cui $\sum x_n = +\infty$ per qualche $\alpha > 0$.

**1 settembre 2010**

1. Studiare al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni dell'equazione
$$\lambda x - \log x = 1.$$

2. Studiare la convergenza delle serie
$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{(\log n)^n}, \qquad \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{(\log n)^{\sqrt{n}}}.$$

3. Sia $x_n$ la successione definita per ricorrenza da
$$x_{n+1} = x_n \sin x_n, \qquad x_0 = 1.$$
   (a) Calcolare $\lim x_n$.
   (b) Calcolare $\lim n!\, x_n$.

4. Sia $f : [1, +\infty[ \to \mathbb{R}$ una funzione continua.
   (a) Provare che
$$|f(x)| \leq \frac{C}{x} \;\; \forall x \geq 1 \Longrightarrow \int_1^{+\infty} |f(x)|^\alpha \, dx < +\infty \text{ per ogni } \alpha > 1.$$
$$|f(x)| \leq \frac{C_n}{x^n} \;\; \forall x \geq 1, \;\; \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \int_1^{+\infty} |f(x)|^\beta \, dx < +\infty \text{ per ogni } \beta > 0.$$
   (b) Mostrare che le implicazioni inverse sono entrambe false.

**14 febbraio 2011**

1. Studiare al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni per $x > 0$ dell'equazione
$$-\frac{x}{3} + |\log x| = \lambda.$$

2. Sia $x_n$ la successione definita per ricorrenza da
$$x_{n+1} = \frac{x_n + x_n^2}{1 + x_n^2}, \qquad x_0 = 3.$$
   (a) Provare che $x_n$ ammette limite finito L.
   (b) Stabilire se $\sum |x_n - L|$ converge.

3. Stabilire se converge
$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x^2)}{x^2 + x^4}\, dx.$$

4. Sia $\phi : [0, +\infty[ \to ]0, +\infty[$ una funzione continua. Consideriamo l'equazione
$$x = \int_0^{y(x)} \phi(t)\, dt \tag{3.14}$$
   (a) Nel caso $\phi(t) = e^t$ trovare una funzione $y : [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ che verifica (3.14) per ogni $x \geq 0$.
   (b) Provare che in generale esiste $\delta > 0$ ed esiste una ed una sola $y : [0, \delta[ \to \mathbb{R}$ che verifica (3.14) per ogni $0 \leq x < \delta$.
   (c) Provare che la funzione $y$ di cui al punto precedente è derivabile.

**28 febbraio 2011**

1. Calcolare i seguenti limiti
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{4^n},\qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{4^{n^2}}.$$

2. Stabilire per quali $\lambda\in\mathbb{R}$ la funzione $f:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ definita da
$$f(x)=\lambda|x-1|+\log x$$
risulta iniettiva e surgettiva.

3. Poniamo
$$f(x)=\int_0^x \arctan t\,dt.$$
   (a) Provare che per $x\in[0,1]$ si ha $x-f(x)\geq 0$.
   (b) Sia $x_n$ la successione definita per ricorrenza da
   $$x_{n+1}=f(x_n),\qquad x_0=\alpha.$$
      i. Nel caso $\alpha=1$ provare che $x_n\to 0$.
      ii. Provare che esiste qualche $\alpha>1$ per cui $x_n\to+\infty$.

4. Sia $f:[0,+\infty[\to[0,+\infty[$ una funzione continua e si consideri la serie
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 f(x+n)\,dx \tag{3.15}$$
   (a) Nel caso $f(x)=(1+x)^{-\alpha}$ con $\alpha>1$ verificare che la serie in (3.15) converge.
   (b) Provare che in generale
   $$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx<+\infty \implies \text{(3.15) converge.}$$
   (c) Stabilire se in generale vale anche l'implicazione
   $$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx<+\infty \implies \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^n f(x+n)\,dx<+\infty$$

# Capitolo 4

# Prove in Itinere

Le conoscenze richieste in queste prove variano a seconda del periodo, in particolare quelle con date di novembre - dicembre presuppongono le minori conoscenze (meno del programma di elementi di Analisi Matematica I), mentre quelle con date di aprile - maggio possono anche presupporre la conoscenza di tutto il programma di un corso annuale di Analisi.

**26 novembre 2001**

1. Calcolare, se esiste, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$
$$\lim_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{2}{n^3}\right)\sqrt{1+n^\alpha+n^4}.$$

2. Calcolare, se esiste, al variare del parametro $\lambda \geq 0$
$$\lim_{x\to+\infty} |\lambda+\sin x|^x .$$

3. Data una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, siano $\phi$ e $\psi$ funzioni definite da $\phi(x) = f(x^2)$ e $\psi(x) = f(x^3)$. Dire quale/i fra queste affermazioni sono vere:
   (a) $\phi$ continua $\Longrightarrow$ $f$ continua,
   (b) $\psi$ continua $\Longrightarrow$ $f$ continua.

4. Sia $D$ la funzione di Dirichlet definita da
$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$
e sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Provare che la funzione $f(x) = D(x)g(x)$ è continua in $c$ se e solo se $g(c) = 0$.

**2 maggio 2002**

1. Calcolare l'ordine di infinitesimo e la parte principale per $x \to +\infty$ della funzione

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x^2+1}\right) - \frac{1}{x^2}.$$

2. Si consideri la successione $(x_n)$ definita per ricorrenza da

$$\begin{cases} x_{n+1} = \sin(x_n^3) \\ x_0 = 1/2. \end{cases}$$

   (a) Dimostrare che $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$.

   (b) Dimostrare che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ converge.

   (c) Dire se converge la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{n!} x_n$.

3. Dire quante soluzioni reali distinte ha l'equazione

$$x^4 = \sin x.$$

4. (a) Dimostrare che per ogni $a \in \mathbb{R}$

$$\int_a^{a+2\pi} \sin x \, dx = 0.$$

   (b) Dimostrare che per ogni funzione $f$ continua e $2\pi$ - periodica esiste una costante $C$ (indipendente da $a$) tale che per ogni $a \in \mathbb{R}$

$$\int_a^{a+2\pi} f(x) \, dx = C. \tag{4.1}$$

   (c) Mostrare che se $f$ è una funzione continua che verifica (4.1) allora $f$ è $2\pi$ periodica.

**15 dicembre 2003**

1. Calcolare
$$\lim \sqrt[n]{2^n + n^5 + 4^n}$$

2. Calcolare
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2) + \arctan(5x)}{x^2 + \log(1+2x)}$$

3. Dire per quali $\alpha > 0$ esiste
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2 \sin x + x^\alpha}{x^2 + 1}$$

4. Sia $A(x) = [a_{ij}(x)]$ una matrice $k \times k$, con le $a_{ij}$ funzioni continue su $\mathbb{R}$. Tenere presente che per ogni matrice $Y_0$ (quadrata di ordine $k$), esiste una ed una sola funzione matriciale $Y(x)$, di classe $C^1$, che verifica:
$$Y(0) = Y_0, \qquad Y'(x) = A(x)Y(x) - Y(x)A(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$
   (a) Mostrare che, se $Y_0$ è una matrice scalare, allora $Y(x)$ è scalare per ogni $x$.
   (b) E' vero che, per ogni $Y_0$ diagonale, $Y(x)$ risulta diagonale?

**20 aprile 2004**

1. Tracciare un grafico (approssimativo) della funzione

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 3},$$

quindi studiare la risolubilità dell'equazione $f(x) = \lambda$ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. Sia $(x_n)$ definita da

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 1}{x_n + 3}; \qquad x_0 = \alpha.$$

   (a) Nel caso $\alpha = 1$ provare che $(x_n)$ è monotona e calcolarne il limite.

   (b) Calcolare (se esiste) il limite di $(x_n)$ al variare di $\alpha > -3$.

3. Dimostrare che la funzione

$$f(x) = 3x - e^{\sin x}$$

è biunivoca da $\mathbb{R}$ su $\mathbb{R}$. Calcolare quindi la derivata della funzione inversa nel punto $-1$ $(= f(0))$.

4. (a) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^1$ tale che

$$\sin f'(x) \geq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{4.2}$$

   Provare che $f$ è monotona (debolmente).

   (b) Provare che la stessa conclusione è valida se si sostituisce (4.2) con l'ipotesi

$$\psi(f'(x)) \geq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

   dove $\psi(t)$ è una funzione continua, positiva in un intorno destro di $t = 0$ e negativa in un intorno sinistro.

**27 maggio 2004**

1. Calcolare
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin^2 x}-(1+x^2)}{1-\cos x^2}.$$

2. (a) Provare che
$$\sum_{n=1}^{+\infty}(n^2+n)\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)=+\infty.$$
   (b) Dire per quali $\alpha>0$
$$\sum_{n=1}^{+\infty}(n^2+n^\alpha)\sin\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)<+\infty.$$

3. Dire per quali $\alpha>0$
$$\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^2+x^\alpha}<+\infty.$$

4. Sia $(a_n)$ una successione di numeri positivi e sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione tale che $f(0)=0$.
   (a) Provare che se $f$ è derivabile in $x=0$ allora
$$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n<+\infty \Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}f(a_n)\quad \text{converge.} \tag{4.3}$$
   (b) Provare che se $f$ è solo continua in $x=0$ in generale (4.3) non è vera.

**22 dicembre 2005**

1. Calcolare
$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\sin\left(\frac{2+\sin x}{x}\right).$$

2. Calcolare
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(3^n+n)}{n}.$$

3. (a) Dimostrare che la successione:
$$x_n = n + \frac{1}{n^2}, \qquad n \geq 1,$$
è strettamente crescente e calcolarne gli estremi inferiore e superiore.

   (b) Mostrare che per ogni coppia di interi $p$, $q \geq 1$ la successione
$$x_n = n^p + \frac{1}{n^q}, \qquad n \geq 1,$$
è strettamente crescente.

4. Sia $(x_n)$ una successione di numeri strettamente positivi tale che
$$\inf_n x_n = 0, \qquad \sup_n x_n = +\infty. \tag{4.4}$$

   (a) Mostrare che $(x_n)$ non ha limite.

   (b) Costruire un esempio esplicito di successione verificante (4.4).

**26 aprile 2006**

1. (a) Provare che
$$x^4 - 4x + 3 \geq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$
   (b) Determinare al variare di $c > 0$ il numero di soluzioni reali dell'equazione
$$cx^4 - 4cx + 3 = 0.$$

2. Sia $(x_n)$ la successione definita per ricorrenza da
$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n^2 - x_n + 1 \\ x_0 = \alpha. \end{cases}$$
   (a) Provare che $(x_n)$ è monotona.
   (b) Calcolare il limite di $(x_n)$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

3. Dire quali delle seguenti funzioni sono uniformemente continue (giustificando la risposta):

| | | |
|---|---|---|
| $\log x$ | su | $[1, +\infty[$ |
| $\log x$ | su | $]0, 1]$ |
| $x \log x$ | su | $[1, +\infty[$ |
| $x \log x$ | su | $]0, 1]$ |
| $\sin(x^2)$ | su | $]0, +\infty[$ |
| $x^{-1} \sin(x^2)$ | su | $[0, +\infty[$ |

4. (a) Determinare una funzione $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile, $\geq 0$ tale che:
$$\phi(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0, \qquad \lim_{x \to -\infty} \phi(x) = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} \phi(x) = +\infty.$$
   (b) E' possibile trovare come $\phi$ una funzione razionale (rapporto di due polinomi)?

**31 maggio 2006**

1. Dire per quali $a \geq 0$ si ha
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n + \sqrt{n}}{n^2 + a^n} < +\infty.$$

2. Sia $f$ la funzione definita da
$$f(x) = \frac{\log(1 + x + x^2) - x}{e^{2x} - (1 + x)^2}.$$
   (a) Provare che $f$ è ben definita su $]0, +\infty[$.
   (b) Provare che $f$ si estende con continuità in $x = 0$.
   (c) Mostrare che $f$ ha minimo assoluto in $]0, +\infty[$.

3. Dire se l'integrale
$$\int_0^{+\infty} \frac{\log^2(\arctan x)}{1 + x^2}\, dx$$
è convergente e, in caso affermativo, calcolarne il valore.

4. Si consideri l'insieme di funzioni su $\mathbb{R}$
$$X = \Big\{ f(x) = P(x)\, e^x \mid P(x) \text{ polinomio} \Big\},$$
e l'applicazione $D$ che ad ogni funzione $f(x)$ associa la sua derivata $f'(x)$.
   (a) Provare che $D : X \to X$.
   (b) Provare che $D : X \to X$ è iniettiva e surgettiva.
   (c) Studiare il caso in cui
$$X = \Big\{ f(x) = P(x)\, e^{x^2} \mid P(x) \text{ polinomio} \Big\}.$$

**6 novembre 2007**

1. Calcolare
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n+2^n}.$$

2. Provare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha:
$$2^{n^2} \geq n!.$$

3. Trovare gli estremi inferiore e superiore (precisando se si tratta di massimo e/o minimo) dell'insieme
$$A := \left\{ \frac{x^2-4}{x+1} \, : \, x \geq 0 \right\}.$$

4. Sia $x_n = \dfrac{p_n}{q_n}$ una successione di numeri razionali tali che $p_n \in \{0, 1, \dots 9\}$ e $q_n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Consideriamo $B := \{x_n : \; n \in \mathbb{N}\}$. Provare che $\inf B = 0$ oppure $B$ ammette minimo.

**20 dicembre 2007**

1. Calcolare
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\arctan x} - \cos x}{\log(1+3x+x^2)}.$$

2. Sia $x_n$ la successione definita per ricorrenza da:
$$x_{n+1} = x_n \log(1+x_n), \quad x_0 = 3.$$
   (a) Mostrare che $x_n$ è monotona e che $\lim x_n = +\infty$.
   (b) Mostrare che per ogni $a > 1$ si ha $\lim a^{-n} x_n = +\infty$.
   (c) Calcolare il limite di $\sqrt[n]{x_n}$.

3. (a) Mostrare che per ogni $\lambda \geq 0$ l'equazione
$$x + \sin x = \lambda$$
   ammette una ed una sola soluzione con $x \geq 0$.
   (b) Mostrare che la conclusione del punto a) non vale per l'equazione
$$\sqrt{x} + \sin x = \lambda.$$

4. Sia $f \in C^1(\mathbb{R})$ una funzione tale che
$$f'(x) > f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$
   (a) Provare che $f$ si può annullare al più una volta.
   (b) Mostrare con un esempio che ci sono casi in cui $f$ si annulla.

**3 aprile 2008**

1. Calcolare
$$\lim_{x\to 0} \frac{2\sin(\arctan x) - \arctan(\sin(2x))}{x^3}.$$

2. Sia $x_n$ la successione definita per ricorrenza da:
$$x_{n+1} = \frac{x_n}{n + x_n}, \quad x_1 = 1.$$
   (a) Calcolare $\lim x_n$.
   (b) Dire se $\sum x_n < +\infty$
   (c) Provare che $\sum \sqrt[n]{x_n} = +\infty$.

3. Studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza della serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^\alpha \arctan(\alpha^n).$$

4. Sia $f(x) = \sin^k x$ con $k \geq 1$.
   (a) Provare che se $k$ è dispari allora $f$ ha una primitiva del tipo
$$F(x) = P(\cos x)$$
   con $P$ polinomio.
   (b) Provare che per $k$ pari $f$ non ha mai primitive del tipo $F(x) = P(\cos x)$ con $P$ polinomio.
   (c) Provare che per $k$ pari $f$ non ha mai primitive neppure del tipo $F(x) = Q(\sin x)$ con $Q$ polinomio.

**30 maggio 2008**

1. Dire se
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(1+3^n)}{n^3} < +\infty.$$

2. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da
$$f(x) \;=\; x - \int_0^x \frac{\arctan t}{t}\, dt.$$
   (a) Provare che $f$ è strettamente crescente.
   (b) Provare che $f$ è surgettiva da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$.

3. Si consideri l'integrale
$$I \;=\; \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha \arctan x}\, dx.$$
   (a) Dire per quali $\alpha > 1$ risulta $I < +\infty$.
   (b) Provare che per $\alpha = 1$ si ha $I = +\infty$.

4. (a) Provare che, se le due funzioni $y = \cos x,\; y = \sin x$, sono soluzioni dell'equazione
$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$
   dev'essere necesariamente $a(x) \equiv 0,\; b(x) \equiv 1$.

   (b) Più in generale provare che due equazioni
$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \;, \quad y'' + \widetilde{a}(x)y' + \widetilde{b}(x)y = 0,$$
   che abbiano in comune due soluzioni $y_1(x)$ e $y_2(x)$ non proporzionali fra loro, sono necessariamente coincidenti, cioé: $a(x) \equiv \widetilde{a}(x),\; b(x) \equiv \widetilde{b}(x)$.

**2 novembre 2009**

1. Provare che per ogni $n \geq 3$ si ha
$$3^n\, n! \geq 2^n + 5^n.$$

2. Calcolare l'estremo inferiore e superiore (precisando se si tratta di minimo e/o massimo) dell'insieme
$$A := \left\{ \frac{2n^4 - 8}{n^2 + 1} \,:\, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

3. Calcolare
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\log^2(n^2+1)}{\log^2(n) + \sqrt[n]{n}}.$$

4. Siano $(x_n)$ e $(y_n)$ due successioni tali che:
$$\begin{cases} x_n + y_n \to 1 \\ x_n y_n \to 0 \end{cases} \tag{4.5}$$

   (a) Nel caso in cui le due successioni abbiano limite (finito od infinito) determinare i possibili valori di tali limiti.

   (b) Dire se due successioni che verificano la (4.5) devono necessariamente avere limite.

**Pisa, 16 dicembre 2009**

1. Mostrare che per ogni $\alpha > 0$ si ha
$$\lim_{x \to +\infty} \left( \frac{x}{1 + x^\alpha} \right)^{1/x} = 1.$$

2. Dire per quali costanti $c \in \mathbb{R}$ si ha
$$e^{cx} \geq x \qquad \forall x \geq 0.$$

3. Sia $(x_n)$ la successione definita per ricorrenza da
$$x_{n+1} = \sqrt[3]{\frac{x_n + x_n^2}{2}}, \qquad x_0 = 2.$$
   (a) Provare che $(x_n)$ è monotona.
   (b) Provare che $\lim x_n = 1$.
   (c) Calcolare $\lim\ n(x_n - 1)$.

4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione $C^1$ che si annulla per $x = 1$ e $x = -1$.
   (a) Provare che esiste una (ed una sola) funzione $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua su $\mathbb{R}$ e derivabile per $x \neq \pm 1$ tale che
$$f(x) = (x^2 - 1)\phi(x).$$
   (b) Provare che se $f$ è $C^2$ allora $\phi$ è derivabile anche per $x = \pm 1$.
   (c) Dire se la conclusione del punto (b) rimane vera anche se non si suppone $f'$ derivabile.

**26 marzo 2010**

1. Calcolare l'ordine di infinitesimo per $x \to 0$ della funzione

$$f(x) = \arctan(x + \sin^2 x) - \sin(x + x^2).$$

2. Stabilire se le seguenti serie convergono

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{\log n}}{2^n}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{\log n}}{2^{\sqrt{n}}}.$$

3. Si consideri la successione definita per ricorrenza da

$$x_{n+1} = \sqrt[n]{n x_n + 1}, \qquad x_1 = 1.$$

   (a) Trovare una costante $C > 1$ tale che $x_n \leq C$ per ogni $n \geq 1$.

   (b) Calcolare il limite di $x_n$.

   (c) Calcolare il limite di $\sqrt{n} \log x_n$.

4. Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione Lipschitziana, cioè per cui esiste una costante $L > 0$ tale che

$$|f(x) - f(y)| \leq L\, |x - y| \qquad \forall\ x,\ y \in [0,1].$$

   Si ponga

$$F(x) = f(x^2), \qquad G(x) = f(\sqrt{x}), \qquad H(x) = x f(\sqrt{x}).$$

   Stabilire quali fra le funzioni $F$, $G$ e $H$ sono necessariamente Lipschitziane.

**4 giugno 2010**

1. Stabilire per quali $\alpha > 0$ si ha

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \sin\left(\frac{n}{1+n+n^\alpha}\right) < +\infty.$$

2. Si consideri l'equazione differenziale

$$y'' - 4y = f(x).$$

   (a) Nel caso $f(x) = e^x$ trovare la soluzione generale dell'equazione.

   (b) Nel caso $f(x) = e^{-x^2}$ stabilire se l'equazione ammette soluzioni limitate in $[0, +\infty[$.

3. (a) Stabilire per quali $\alpha \geq 1$ si ha

$$\int_0^1 \frac{\sin^2(\log(1+x))}{x^\alpha} dx < +\infty.$$

   (b) Stabilire per quali $\alpha \geq 1$ si ha

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(\log(1+x))}{x^\alpha} dx < +\infty.$$

4. Sia $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ una funzione contiua.

   (a) Mostrare che se esiste $\lim_{x\to+\infty} f(x) \neq 0$ allora esiste

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{1}{R} \int_0^R f(x)\, dx. \tag{4.6}$$

   (b) Mostrare che per ogni $f$ periodica (cioè per cui esiste $T > 0$ tale che $f(x+T) = f(x)$ per ogni $x \geq 0$) il limite (4.6) esiste.

   (c) Costruire una funzione continua e limitata per cui il limite (4.6) non esiste.