

Università di Pisa - Corso di Laurea in Matematica
Prova in itinere di Analisi Matematica 1
Pisa, 5 Maggio 2015

1. Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \cos x \cdot \sin \frac{1}{x} & \text{se } x < 0, \\ a & \text{se } x = 0, \\ \sin x \cdot \cos \frac{1}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

- (a) Determinare per quali valori del parametro reale a la funzione risulta semi-continua inferiormente o superiormente su tutto \mathbb{R} .
- (b) Studiare l'uniforme continuità, la lipschitzianità e l'hölderianità di $f(x)$ in $(-\infty, 0)$ e in $(0, +\infty)$.

2. Consideriamo la funzione

$$f(x) = \sin(x^2) + \int_0^x \frac{\arctan t}{t} dt.$$

- (a) Calcolare il polinomio di Taylor di $f(x)$ di ordine 6 con centro in $x = 0$.
- (b) Dimostrare che $f(x)$ è invertibile in un intorno dell'origine e calcolare il polinomio di Taylor dell'inversa di ordine 3 con centro in $x = 0$.
- (c) Stabilire se esiste un numero reale A tale che la restrizione di $f(x)$ alla semiretta $[A, +\infty)$ è iniettiva.
- (d) Stabilire se esiste un numero reale λ tale che

$$\limsup_{x \rightarrow +\infty} |f(x) - \lambda \log x| < +\infty.$$

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.