

Università di Pisa - Corso di Laurea in Matematica
Prova in itinere di Analisi Matematica 1

Pisa, 20 Marzo 2015

(Problemi da 3 punti)

1. Determinare una primitiva della funzione $\cos^7 x$.

2. Stabilire se l'espressione

$$\int_0^1 \frac{x+1}{x+\sqrt{x}} dx$$

rappresenta un numero reale, ed in caso affermativo calcolarlo esplicitamente.

3. Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$u''(t) - 2u'(t) = \cos^2 t.$$

4. Le successioni a_n e b_n sono definite ponendo $a_0 = b_0 = 0$, e poi per ricorrenza

$$a_{n+1} = 3a_n + b_n + 5^n, \quad b_{n+1} = a_n + b_n.$$

Calcolare il limite di $\sqrt[n]{a_n}$.

(Problemi da 8 punti)

5. Consideriamo il problema di Cauchy

$$u' = \frac{e^{-t}}{1-u} \quad u(0) = \alpha.$$

(a) Trovare la soluzione del problema nel caso $\alpha = 0$, precisando se si ha (per tempi positivi) esistenza globale, blow up o break down.

(b) Determinare per quali valori di α si ha esistenza globale nel futuro.

6. Consideriamo la funzione

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

(a) Determinare per quali valori reali di x è ben definita.

(b) Determinare se per $x > 0$ la funzione è limitata superiormente/inferiormente e se ammette massimo/minimo (ed in caso affermativo determinare i punti di massimo/minimo).

7. Consideriamo la successione definita per ricorrenza da

$$x_{n+1} = 5x_n - x_n^2 - 4, \quad x_0 = \alpha.$$

(a) Nel caso $\alpha = \sqrt[3]{7}$, determinare il limite di x_n .

(b) Determinare per quali valori di α la successione ha limite reale.

(c) Tornando al caso $\alpha = \sqrt[3]{7}$, determinare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log |\log |x_n||}{n}.$$

Si ricorda che ogni passaggio deve essere adeguatamente giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla correttezza ed alla chiarezza delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.