1. Consideriamo nello spazio i tre punti

$$A = (1, 1, 1), \qquad B = (1, 1, 0), \qquad C = (3, 2, -1).$$

(a) Determinare il punto di intersezione tra la retta AC ed il piano yz, e l'ampiezza dell'angolo che formano.

(b) Determinare l'equazione cartesiana del piano che passa C e per l'origine, ma non interseca la retta AB.

(a) Retta AC: $A + t(C-A) = (1,1,1) + t(2,1,-2) = (1+2t, 1+t, 1-2t)$

Piano yz: $x = 0$

Intersezione $1+2t = 0 \rightsquigarrow t = -\frac{1}{2} \rightsquigarrow \boxed{\left(0, \frac{1}{2}, 2\right)}$

Angolo tra retta e vettore $\perp$ al piano:

$$\cos\theta = \frac{\langle (2,1,-2), (1,0,0) \rangle}{\|(2,1,-2)\| \cdot \|(1,0,0)\|} = \frac{2}{3} \qquad \theta = \arccos\frac{2}{3}$$

Angolo richiesto: $\frac{\pi}{2} - \arccos\frac{2}{3} = \boxed{\arccos\frac{\sqrt{5}}{3}}$

L'ultimo passaggio è precorso ☺

(b) $t(C-O) + s(A-B) = t(3,2,-1) + s(0,0,1)$

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (2,-3,0) \rightsquigarrow 2x - 3y = 0$$

Verifica: il piano passa per C

retta AB: $A + t(A-B) = (1,1,1) + t(0,0,1) = (1,1,1+t)$

Se interseco ottengo equazione senza soluzioni $(2-3=0)$.

2. Consideriamo, al variare dei parametri reali a e b, il sistema lineare

$$\begin{aligned} ax + 3y &= 3 - z \\ 2x + 4y - z &= 0 \\ x - z &= b \end{aligned}$$

(a) Determinare per quali valori dei parametri il sistema ha soluzione unica.

(b) Determinare per quali valori dei parametri il sistema non ha soluzione.

(c) Determinare per quali valori dei parametri il sistema ha più di una soluzione, ed in tal caso risolvere esplicitamente il sistema.

(a) $$\begin{aligned} ax + 3y + z &= 3 \\ 2x + 4y - z &= 0 \\ x \quad\quad - z &= b \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} a & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & b \end{array}\right)$$

Soluzione unica $\iff$ Det (Matrice coeff.) $\neq 0 \iff -4a - 3 - 4 + 6 \neq 0$

$\iff 4a \neq -1 \iff \boxed{a \neq -\frac{1}{4}}$

(b) Il sistema non ha soluzione $\iff$ rango $\underset{\overset{\shortparallel}{2}}{(A)} \neq$ rango $\underset{\overset{\shortparallel}{3}}{(A')}$

Quindi deve essere $a = \frac{1}{4}$ e rango $A' = 3$ il che è equivalente a

$$\text{Det} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & b \end{pmatrix} \neq 0, \text{ cioè } -3b - 12 - 4b \neq 0, \quad 7b \neq -12, \quad b \neq -\frac{12}{7}$$

Quindi nessuna soluzione $\iff \boxed{a = -\frac{1}{4} \quad b = -\frac{12}{7}}$

(c) Il sistema ha infinite soluzioni $\iff \boxed{a = -\frac{1}{4} \text{ e } b = -\frac{12}{7}}$, il che è equivalente a dire che la prima e la 4^a colonna sono comb. lin. delle 2 centrali. Risolviamo alla Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -\frac{1}{4} & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -\frac{12}{7} \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 12 & 4 & 12 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \\ 7 & 0 & -7 & -12 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 12 & 4 & 12 \\ 0 & 28 & 7 & 24 \\ 0 & 84 & 21 & 72 \end{array}\right)$$

triplo della 2^a

Quindi resta $$\begin{aligned} -x + 12y + 4z &= 12 \\ 28y + 7z &= 24 \end{aligned} \qquad z = t$$

$28y = 24 - 7t, \quad y = \frac{6}{7} - \frac{1}{4}t$

$x = 12y + 4z - 12 = \frac{72}{7} - 3t + 4t - 12 = -\frac{12}{7} + t$

$$(x, y, z) = \left(-\frac{12}{7} + t, \frac{6}{7} - \frac{1}{4}t, t\right) = \boxed{\left(-\frac{12}{7}, \frac{6}{7}, 0\right) + t\left(1, -\frac{1}{4}, 1\right)}$$

3. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Dimostrare che A è simile ad una matrice diagonale.

(b) Determinare la matrice diagonale simile ad A ed una matrice di cambio di base che realizza la similitudine.

(a) Calcolo il polinomio caratteristico

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & 9 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 2 & 7 & 4-\lambda \end{pmatrix} \rightsquigarrow (3-\lambda)\left[(3-\lambda)(4-\lambda)-2\right]$$

$$= (3-\lambda)(12-7\lambda+\lambda^2-2)$$

$$= (3-\lambda)(\lambda^2-7\lambda+10) = (3-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-5)$$

Gli autovalori sono $2, 3, 5$, quindi reali e distinti, quindi A è diagonalizzabile.

(b) Basta cercare gli autovettori, facendo $\ker(A-\lambda Id)$

$$\lambda=2 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 9 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (1, 0, -1)$$ (Quasi ovvio) (VERIFICA!)

$$\lambda=3 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (1, 1, -9)$$ (Sostituire per credere) (VERIFICA!)

$$\lambda=5 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -2 & 9 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (1, 0, 2)$$ (Quasi ovvio) (VERIFICA!)

Quindi

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -9 & 2 \end{pmatrix}$$

Per verifica calcoliamo l'inversa

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 11 & 3 & -8 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Cofattori}} \rightsquigarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -11 & 3 & 8 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Aggiusto segni}} \rightsquigarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -11 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 8 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Trasposta}} \underbrace{\cdot \frac{1}{3}}_{\cdot \frac{1}{Det}} = M^{-1}$$

Verifica: $M^{-1}AM = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -11 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 8 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 9 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -9 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

4. Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ la forma quadratica

$$q(x,y,z) = a(x^2+y^2+z^2) + 2xy + 2yz.$$

(a) Nel caso $a=1$, determinare la segnatura della forma quadratica.

(b) Sempre nel caso $a=1$, determinare (descrivendolo come span) un sottospazio di dimensione massima su cui la forma risulti definita positiva.

(c) Determinare per quali valori di a la forma quadratica è definita positiva.

(a-b) Completo i quadrati

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2+2xy+2yz &= (x+y)^2+z^2+2yz \\ &= (x+y)^2+z^2+2yz+y^2-y^2 \\ &= (x+y)^2+(y+z)^2-y^2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{segnatura } ++- \text{, cioè } (2,1,0)}$

Spazio su cui è definita positiva: $y=0$, cioè

$$\boxed{\mathrm{Span}(\{(1,0,0),(0,0,1)\})}$$

(c) $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$

Se è definita positiva, allora i 3 determinanti devono per forza essere positivi, quindi

$a>0$

$a^2-1>0$

$a^3-2a>0 \rightsquigarrow a(a^2-2)>0$

Tenendo conto che $a>0$, la condizione più restrittiva è $a^2-2>0$, cioè

$$\boxed{a>\sqrt{2}}$$

Metodo alternativo: fare il conto con Cartesio. Il polinomio caratteristico diventa

$$\begin{aligned} (\lambda-a)^3-2(\lambda-a) &= \lambda^3-3a\lambda^2+3a^2\lambda-a^3-2\lambda+2a \\ &= \lambda^3-3a\lambda^2+(3a^2-2)\lambda+(2a-a^3) \end{aligned}$$

e i coefficienti devono essere a segno alterno. Volendo gli autovalori si calcolano esplicitamente (uno è $\lambda=a$).

Gli stessi metodi (Cartesio o calcolo esplicito degli autovalori) funzionano anche per il p.to (a). Funziona anche Sylvester 1-3-2.