

## Scritto d'esame di Algebra Lineare

Pisa, 14 Febbraio 2014

1. Consideriamo nello spazio i tre punti

$$A = (1, 1, 1), \quad B = (1, 1, 0), \quad C = (3, 2, -1).$$

- (a) Determinare il punto di intersezione tra la retta  $AC$  ed il piano  $yz$ , e l'ampiezza dell'angolo che formano.
- (b) Determinare l'equazione cartesiana del piano che passa  $C$  e per l'origine, ma non interseca la retta  $AB$ .

2. Consideriamo, al variare dei parametri reali  $a$  e  $b$ , il sistema lineare

$$\begin{aligned} ax + 3y &= 3 - z \\ 2x + 4y - z &= 0 \\ x - z &= b \end{aligned}$$

- (a) Determinare per quali valori dei parametri il sistema ha soluzione unica.
- (b) Determinare per quali valori dei parametri il sistema non ha soluzione.
- (c) Determinare per quali valori dei parametri il sistema ha più di una soluzione, ed in tal caso risolvere esplicitamente il sistema.

3. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

- (a) Dimostrare che  $A$  è simile ad una matrice diagonale.
- (b) Determinare la matrice diagonale simile ad  $A$  ed una matrice di cambio di base che realizza la similitudine.

4. Consideriamo in  $\mathbb{R}^3$  la forma quadratica

$$q(x, y, z) = a(x^2 + y^2 + z^2) + 2xy + 2yz.$$

- (a) Nel caso  $a = 1$ , determinare la segnatura della forma quadratica.
- (b) Sempre nel caso  $a = 1$ , determinare (descrivendolo come span) un sottospazio di dimensione massima su cui la forma risulti definita positiva.
- (c) Determinare per quali valori di  $a$  la forma quadratica è definita positiva.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato. Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.