

Scritto d'esame di Algebra Lineare

Pisa, 14 Febbraio 2014

1. Consideriamo nello spazio i tre punti

$$A = (1, 1, 1), \quad B = (1, 1, 0), \quad C = (3, 2, -1).$$

- Determinare il punto di intersezione tra la retta AC ed il piano yz , e l'ampiezza dell'angolo che formano.
- Determinare l'equazione cartesiana del piano che passa C e per l'origine, ma non interseca la retta AB .

2. Consideriamo, al variare dei parametri reali a e b , il sistema lineare

$$\begin{aligned} ax + 3y &= 3 - z \\ 2x + 4y - z &= 0 \\ x - z &= b \end{aligned}$$

- Determinare per quali valori dei parametri il sistema ha soluzione unica.
- Determinare per quali valori dei parametri il sistema non ha soluzione.
- Determinare per quali valori dei parametri il sistema ha più di una soluzione, ed in tal caso risolvere esplicitamente il sistema.

3. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

- Dimostrare che A è simile ad una matrice diagonale.
- Determinare la matrice diagonale simile ad A ed una matrice di cambio di base che realizza la similitudine.

4. Consideriamo in \mathbb{R}^3 la forma quadratica

$$q(x, y, z) = a(x^2 + y^2 + z^2) + 2xy + 2yz.$$

- Nel caso $a = 1$, determinare la segnatura della forma quadratica.
- Sempre nel caso $a = 1$, determinare (descrivendolo come span) un sottospazio di dimensione massima su cui la forma risulti definita positiva.
- Determinare per quali valori di a la forma quadratica è definita positiva.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato. Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.