f di]0, +∞[in R
f(x) = (e^-1/x) * (x^-3/2) per ogni x che appartiene a]0, +∞[

I quesiti a riguardo della funzione sopra citata sono:
i) calcolare lim x-> +∞ e lim x-> 0 di f(x)
ii) fare la derivata prima e discutere il segno, gli intervalli di crescenza e di decrescenza della funzione.
iii) trovare e indicare gli eventuali punti di max relativo o assoluto di f.
iv) trovare ed indicare gli eventuali punti di flesso di f.
v) abbozzare il grafico.

$$f(x) = \overset{>0}{e^{-1/x}} \cdot \overset{>0}{x^{-3/2}} \quad (>0) \qquad x \in (0, +\infty)$$

i) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$$\begin{cases} e^{-1/x} = 1 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \\ f(x) = e^{-1/x} \cdot x^{-3/2} = x^{-3/2} - x^{-5/2} + o(x^{-5/2}) \to 0 \end{cases}$$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$

$$f(x) = e^{-1/x} \cdot x^{-3/2} = e^{-\frac{1}{x}\log e - \frac{3}{2}\log x} =$$

$$= e^{\overbrace{-\frac{1}{x}(1 + \underbrace{x\log x}_{\to 0})}^{\to -\infty}} \to 0$$

ii)
iii)

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-1/x} x^{-3/2} - \frac{3}{2} e^{-1/x} x^{-5/2} =$$

$$= \overbrace{e^{-1/x} x^{-5/2}}^{>0} \left(x^{-1} - 3/2\right) \qquad f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{x} - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

$f'(x)$ 0 ↗ 2/3 ↘
0 + + + + 0 − − − − − −
MAX

iv) $f''(x) = x^{-2} e^{-1/x} x^{-5/2} \left(x^{-1} - 3/2 \right) - \frac{5}{2} e^{-1/x} x^{-7/2} \left(x^{-1} - 3/2 \right) +$

$- x^{-2} \cdot e^{-1/x} x^{-5/2} = x^{-2} e^{-1/x} x^{-5/2} \left(x^{-1} - \frac{3}{2} - \frac{5}{2} + \frac{15}{5} x - 1 \right) =$

$$= \underbrace{\frac{x^{-3} e^{-1/x} x^{-5/2}}{5}}^{>0} \left(15x^2 - 20x + 5 \right)$$

$f''(x) = 0 \Rightarrow \quad 15x^2 - 20x + 5 = 0$

$$x = \frac{20 \pm \sqrt{500 - 250}}{30} = \frac{20 \pm 5\sqrt{10}}{30} = \frac{10 \pm 2\sqrt{10}}{15}$$

$f''(x)$ $\quad 0 \; + + + \; \frac{10 - 2\sqrt{10}}{15} \; - - - \; \frac{10 + 2\sqrt{10}}{15} \; + + + + +$

$\cup \quad \cap \quad \cup$

v)