

f di $]0, +\infty[$ in \mathbb{R}

$f(x) = (e^{-1/x}) \cdot (x^{-3/2})$ per ogni x che appartiene a $]0, +\infty[$

I quesiti a riguardo della funzione sopra citata sono:

i) calcolare $\lim_{x \rightarrow +\infty}$ e $\lim_{x \rightarrow 0}$ di $f(x)$

ii) fare la derivata prima e discutere il segno, gli intervalli di crescita e di decrescenza della funzione.

iii) trovare e indicare gli eventuali punti di max relativo o assoluto di f .

iv) trovare ed indicare gli eventuali punti di flesso di f .

v) abbozzare il grafico.

$$f(x) = e^{-1/x} \cdot x^{-3/2} \quad (>0) \quad x \in (0, +\infty)$$

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

$$e^{-1/x} = 1 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f(x) = e^{-1/x} \cdot x^{-3/2} = x^{-3/2} - x^{-5/2} + o(x^{-5/2}) \rightarrow 0$$

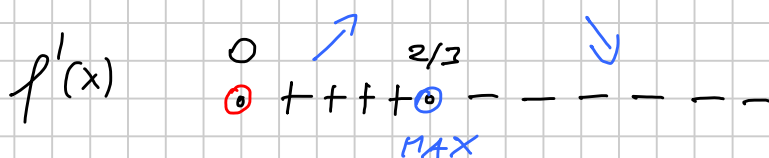
$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$

$$f(x) = e^{-1/x} \cdot x^{-3/2} = e^{-\frac{1}{x} \log e - \frac{3}{2} \log x} = e^{-\frac{1}{x} (1 + x \log x)}$$

$$= e^{-\frac{1}{x} (1 + x \log x)} \rightarrow 0$$

ii) $f'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-1/x} x^{-3/2} - \frac{3}{2} e^{-1/x} x^{-5/2} =$

iii) $= e^{-1/x} x^{-5/2} (x^{-1} - 3/2)$ $f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{x} - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$



$$iv) f''(x) = x^{-2} e^{-1/x} x^{-5/2} \left(x^{-1} - 3/2 \right) - \frac{5}{2} e^{-1/x} x^{-7/2} \left(x^{-1} - 3/2 \right) +$$

$$- x^{-2} \cdot e^{-1/x} x^{-5/2} = x^{-2} e^{-1/x} x^{-5/2} \left(x^{-1} - \frac{3}{2} - \frac{5}{2} + \frac{15}{5} x - 1 \right) =$$

$$= \frac{x^{-3} e^{-1/x} x^{-5/2}}{5} (15x^2 - 20x + 5)$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 15x^2 - 20x + 5 = 0$$

$$x = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 250}}{30} = \frac{20 \pm 5\sqrt{10}}{30} = \frac{10 \pm 2\sqrt{10}}{15}$$

$$f''(x) \quad \begin{array}{c} 0 \quad \cup \quad \cap \quad \cup \\ \textcircled{\cdot} \quad + + + \quad \textcircled{\cdot} \quad - - - \quad \textcircled{\cdot} \quad + + + + + \\ \frac{10-2\sqrt{10}}{15} \quad \frac{10+2\sqrt{10}}{15} \end{array}$$

