BY GIMUSI 28/01/15

Funzioni – Esercizi Teorici 1

Argomenti: funzioni tra insiemi **Difficoltà:** ⋆⋆⋆

Prerequisiti: funzioni tra insiemi, iniettività, surgettività, composizione

---

1. (Iniettività, surgettività e composizione) Enunciare per bene e dimostrare i seguenti fatti.
   (a) La composizione di due funzioni iniettive è iniettiva.
   (b) La composizione di due funzioni surgettive è surgettiva.
   (c) La composizione di due funzioni invertibili è invertibile. Come si scrive l'inversa della composizione conoscendo le inverse delle due componenti?
   (d) Se la composizione di due funzioni è iniettiva, allora la più interna è iniettiva.
   (e) Se la composizione di due funzioni è surgettiva, allora la più esterna è surgettiva.

   Generalizzare al caso di composizione di n funzioni.

2. Trovare due funzioni $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tali che g non è iniettiva, ma $g \circ f$ lo è.

3. Trovare due funzioni $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tali che f non è surgettiva, ma $g \circ f$ lo è.

4. Sia A un insieme, e sia $f : A \to A$ una funzione. Dimostrare che f è iniettiva se e solo se $f \circ f$ è iniettiva. Stessa cosa con "surgettiva". Generalizzare al caso di f composta con se stessa n volte.

5. (Inverse destre e sinistre) Sia $f : A \to B$ una funzione. Determinare tutte le possibili implicazioni tra le seguenti affermazioni:
   (a) f è iniettiva,
   (b) f è surgettiva,
   (c) esiste $g : B \to A$ tale che $g(f(a)) = a$ per ogni $a \in A$ (inversa sinistra),
   (d) esiste $g : B \to A$ tale che $f(g(b)) = b$ per ogni $b \in b$ (inversa destra).

6. (a) Trovare una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ che ammetta almeno due inverse sinistre.
   (b) Trovare una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ che ammetta almeno due inverse destre.
   (c) Trovare una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ che sia l'inversa di se stessa e tale che $f(n) \neq n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
   (d) Trovare una funzione $f : (0, 1) \to [0, 1]$ che sia invertibile. ?

7. Siano A un insieme di m elementi e B un insieme di n elementi. Dimostrare che
   (a) esistono funzioni da A in B iniettive se e solo se $m \leq n$,
   (b) esistono funzioni da A in B surgettive se e solo se $m \geq n$.

   Ma stiamo usando qualche ipotesi non scritta su m ed n?

8. Sia A un insieme finito. Dimostrare che una funzione $f : A \to A$ è iniettiva se e solo se è surgettiva.

1/9

1. (Iniettività, surgettività e composizione) Enunciare per bene e dimostrare i seguenti fatti.

(a) La composizione di due funzioni iniettive è iniettiva.

$$\begin{cases} f: A \to B & f(a) = f(b) \Rightarrow a = b \quad (i) \\ g: B \to C & g(a) = g(b) \Rightarrow a = b \quad (ii) \end{cases}$$

$g \circ f: A \to C \qquad g(a) = g(f(a)) = g(b) = g(f(b))$

$\overset{(ii)}{\Rightarrow} f(a) = f(b) \overset{(i)}{\Rightarrow} a = b$

$\rightsquigarrow$ $g \circ f$ È INIETTIVA

(b) La composizione di due funzioni surgettive è surgettiva.

$$\begin{cases} f: A \to B & \forall b \in B \quad \exists a \in A \quad f(a) = b \quad (i) \\ g: B \to C & \forall c \in C \quad \exists b \in B \quad g(b) = c \quad (ii) \end{cases}$$

$$g \circ f: A \to C \quad \begin{cases} \forall c \in C \quad \exists b \in B \quad g(b) = c \quad (ii) \\ \forall b \in B \quad \exists a \in A \quad f(a) = b \quad (i) \end{cases}$$

$\Rightarrow \forall c \in C \quad \exists a \in A \quad g \circ f = g(f(a)) = c$

$\rightsquigarrow$ $g \circ f$ È SURGETTIVA

(c) La composizione di due funzioni invertibili è invertibile. Come si scrive l'inversa della composizione conoscendo le inverse delle due componenti?

$$\begin{cases} f: A \to B \text{ INIETTIVA E SURGETTIVA} \overset{TH}{\Rightarrow} \exists \text{ INVERSA } f^{-1}: B \to A \\ g: B \to C \text{ INIETTIVA E SURGETTIVA} \overset{TH}{\Rightarrow} \exists \text{ INVERSA } g^{-1}: C \to B \end{cases}$$

$g \circ f: A \to C$ INIETTIVA$^{(a)}$ E SURGETTIVA$^{(b)}$ $\overset{TH}{\Rightarrow}$ $\exists$ INVERSA $(g \circ f)^{-1}: C \to A$

$(g \circ f)^{-1}: C \to A \qquad (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} = f^{-1}(g^{-1}(x))$

(d) Se la composizione di due funzioni è iniettiva, allora la più interna è iniettiva.

$$\begin{cases} f: A \to B \quad g: B \to C \\ g \circ f: A \to C \quad g \circ f(a) = g \circ f(b) \Rightarrow a = b \end{cases}$$

$$a \neq b \Rightarrow g(f(a)) \neq g(f(b)) \Rightarrow f(a) \neq f(b)$$

$\leadsto$ f É INIETTIVA

(e) Se la composizione di due funzioni è surgettiva, allora la più esterna è surgettiva.

$$\begin{cases} f: A \to B \quad g: B \to C \\ g \circ f: A \to C \quad \forall c \in C \ \exists a \in A \ g \circ f(a) = c \end{cases}$$

$$\forall c \in C \quad \exists a \in A \quad g(f(a)) = c$$

$$b = f(a) \in B$$

$$\forall c \in C \quad \exists b = f(a) \in B \quad g(b) = c$$

$\leadsto$ g É SURGETTIVA

Generalizzare al caso di composizione di n funzioni.

(a) La composizione di ~~due~~ n funzioni iniettive è iniettiva.

$$f_i : A_i \to A_{i+1} \qquad f(a_1^i) = f(a_2^i) \Rightarrow a_1^i = a_2^i$$

$$f_n \circ f_{n-1} \circ \dots \circ f_1 : A_1 \to A_n$$

$$f_n \circ f_{n-1} \circ \dots \circ f_1(a_1^1) = f_n \circ f_{n-1} \circ \dots \circ f_1(a_2^1)$$

$\Rightarrow f_{n-1} \circ \dots \circ f_1(a_1^1) = f_{n-1} \circ \dots \circ f_1(a_2^1)$

$\Rightarrow \dots \Rightarrow a_1^1 = a_2^1$

$\rightsquigarrow f_n \circ f_{n-1} \circ \dots \circ f_1$ È INIETTIVA

(b) La composizione di ~~due~~ n funzioni surgettive è surgettiva.

$f_i: A_i \to A_{i+1} \quad \forall a^{i+1} \in A_{i+1} \ \exists a^i \in A \quad f(a^i) = a^{i+1}$ (i)

$f_n \circ f_{n-1} \circ \dots \circ f_1 : A_1 \to A_n$

$$
(i) \begin{cases}
\forall a^{n+1} \in A_{n+1} & \exists a^n \in A_n \ \text{t.c.} \ f_n(a^n) = a^{n+1} \\
\forall a^n \in A_n & \exists a^{n-1} \in A_{n-1} \ \text{t.c.} \ f_{n-1}(a^{n-1}) = a^n \\
\vdots & \\
\forall a^2 \in A_2 & \exists a^1 \in A_1 \ \text{t.c.} \ f_1(a^1) = a^2
\end{cases}
$$

$\Rightarrow \forall a^{n+1} \in A_{n+1} \ \exists a^1 \in A_1 \ \text{t.c.} \ f_n(f_{n-1}(\dots f_1(a_1))) = a^{n+1}$

$\rightsquigarrow f_n \circ f_{n-1} \circ \dots \circ f_1$ È SURGETTIVA

(c) La composizione di ~~due~~ n funzioni invertibili è invertibile. Come si scrive l'inversa della composizione conoscendo le inverse delle due componenti?

$f_i : A_i \to A_{i+1}$ INIETTIVA E SURGETTIVA $\overset{TH}{\Rightarrow} \exists f_i^{-1} : A_{i+1} \to A_i$

$f_n \circ \dots \circ f_1 : A_1 \to A_n$ INIETTIVA E SURGETTIVA $\Rightarrow \exists (f_n \circ \dots \circ f_1)^{-1}$

(a) (b)

$(f_n \circ \dots \circ f_1)^{-1} : A_n \to A_1 \qquad f_1^{-1} \circ \dots \circ f_n^{-1}(x) = f_1^{-1}(f_2^{-1}(\dots(f_n^{-1}(x))))$

(d) Se la composizione di ~~due~~ n funzioni è iniettiva, allora la più interna è iniettiva.

$$\begin{cases} f_i : A_i \to A_{i+1} \quad f_n \circ \dots \circ f_1 : A_1 \to A_n \quad \text{INIETTIVA} \\ f_n \circ \dots \circ f_1(a) = f_n \circ \dots \circ f_1(b) \Rightarrow a = b \end{cases}$$

$$a \neq b \Rightarrow f_n(\dots f_1(a)) \neq f_n(\dots f_1(b)) \Rightarrow f_1(a) \neq f_1(b)$$

$\rightsquigarrow f_1$ È INIETTIVA

(e) Se la composizione di ~~due~~ n funzioni è surgettiva, allora la più esterna è surgettiva.

$$\begin{cases} f_i : A_i \to A_{i+1} \quad f_n \circ \dots \circ f_1 : A_1 \to A_n \quad \text{SURGETTIVA} \\ \forall b \in A_n \ \exists a \in A_1 \quad f_n \circ \dots \circ f_1(a) = b \end{cases}$$

$$\forall b \in A_n \ \exists c \in A_{n-1} \quad c = f_{n-1} \circ \dots \circ f_1(a)$$

$$\text{t.c.} \quad f_n(c) = b \Rightarrow f_n \text{ È SURGETTIVA}$$

2. Trovare due funzioni $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tali che g non è iniettiva, ma $g \circ f$ lo è.

$$\begin{cases} g(n) = n^2 - 2n + 1 = (n-1)^2 \quad g(0) = g(2) = 1 \\ f(n) = n^2 + 1 \end{cases}$$

$$g \circ f = (n^2 + 1 - 1)^2 = n^4 \quad \text{MON. STRETT. CRESC.} \Rightarrow \text{INIETTIVA}$$

3. Trovare due funzioni $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tali che f non è surgettiva, ma $g \circ f$ lo è.

$$f = 2n, \ g = [n/2] \rightsquigarrow g \circ f = [n] = n \quad \text{SURGETTIVA}$$

4. Sia A un insieme, e sia $f : A \to A$ una funzione. Dimostrare che f è iniettiva se e solo se $f \circ f$ è iniettiva. Stessa cosa con "surgettiva". Generalizzare al caso di f composta con se stessa n volte.

(a) $f \circ f$ INIETTIVA $\Longleftrightarrow$ f È INIETTIVA

(i) $f \circ f$ INIETTIVA $\Rightarrow$ f È INIETTIVA

$$a \neq b \Rightarrow f \circ f(a) \neq f \circ f(b) \Rightarrow f(a) \neq f(b)$$

(ii) f È INIETTIVA $\Rightarrow$ $f \circ f$ INIETTIVA (V.C. P.TO "1-(a)")

(b) $f \circ f$ SURGETTIVA $\Longleftrightarrow$ f È SURGETTIVA

(i) $f \circ f$ SURGETTIVA $\Rightarrow$ f È SURGETTIVA

$\forall a \in A \quad \exists b \in A$ t.c. $f \circ f(b) = a$

$\forall a \in A \quad \exists c = f(b)$ t.c. $f(c) = a$

(ii) f È SURGETTIVA $\Longleftrightarrow$ $f \circ f$ SURGETTIVA (V.C. "1-(b)")

(c) $f \circ \dots \circ f$ INIETTIVA $\Longleftrightarrow$ f È INIETTIVA

(i) $f \circ \dots \circ f$ INIETTIVA $\Rightarrow$ f È INIETTIVA

$$a \neq b \Rightarrow f \circ \dots \circ f(a) \neq f \circ \dots \circ f(b) \Rightarrow f(a) \neq f(b)$$

(ii) f È INIETTIVA $\Rightarrow$ $f \circ \dots \circ f$ INIETTIVA (V.C. P.TO "1-(a)")

(d) $f \circ \dots \circ f$ SURGETTIVA $\Longleftrightarrow$ f È SURGETTIVA

(i) $f \circ \dots \circ f$ SURGETTIVA $\Rightarrow$ f È SURGETTIVA

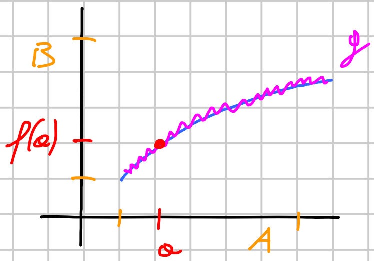
$\forall a \in A \quad \exists b \in A$ t.c. $f \circ \dots \circ f(b) = a$

$\exists c = \overbrace{f \circ \dots \circ f}^{(n-1)}(b)$ t.c. $f(c) = a$

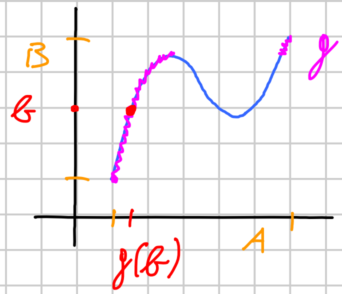
(ii) f È SURGETTIVA $\Rightarrow$ $f \circ \dots \circ f$ SURGETTIVA (V.C. "1-(b)")

5. (Inverse destre e sinistre) Sia $f : A \to B$ una funzione. Determinare tutte le possibili implicazioni tra le seguenti affermazioni:

(a) f è iniettiva,
(b) f è surgettiva,
(c) esiste $g : B \to A$ tale che $g(f(a)) = a$ per ogni $a \in A$ (inversa sinistra),
(d) esiste $g : B \to A$ tale che $f(g(b)) = b$ per ogni $b \in b$ (inversa destra).



INVERSA SINISTRA



INVERSA DESTRA

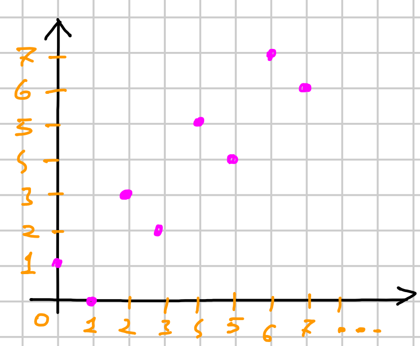
(a) $\iff$ (c) (b) $\iff$ (d) (a) $\wedge$ (b) $\iff$ (c) $\wedge$ (d)

6. (a) Trovare una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ che ammetta almeno due inverse sinistre.
(b) Trovare una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ che ammetta almeno due inverse destre.
(c) Trovare una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ che sia l'inversa di se stessa e tale che $f(n) \neq n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
(d) Trovare una funzione $f : (0, 1) \to [0, 1]$ che sia invertibile.

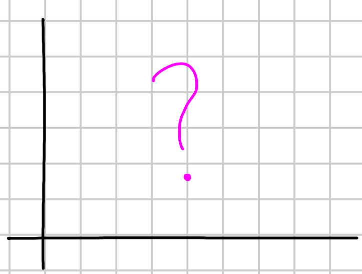
(a) $f(n) = n+1 \quad g_1(n) = \begin{cases} 0 & \text{SE } n=0 \\ n-1 & \text{SE } n \neq 0 \end{cases} \quad g_2(n) = \begin{cases} 1 & \text{SE } n=0 \\ n-1 & \text{SE } n \neq 0 \end{cases}$

(b) $f(n) = \begin{cases} 0 & \text{SE } n=0 \\ n-1 & \text{SE } n \neq 0 \end{cases} \quad g_1(n) = \begin{cases} 0 & \text{SE } n=0 \\ n+1 & \text{SE } n \neq 0 \end{cases} \quad g_2(n) = \begin{cases} 1 & \text{SE } n=0 \\ n+1 & \text{SE } n \neq 0 \end{cases}$

(c) $f(n) = f^{-1}(n) = \begin{cases} n+1 & \text{SE } n \text{ PARI} \\ n-1 & \text{SE } n \text{ DISPARI} \end{cases}$



(d) $f : (0,1] \to [0,1]$



7. Siano A un insieme di m elementi e B un insieme di n elementi. Dimostrare che

(a) esistono funzioni da A in B iniettive se e solo se $m \leq n$,

(b) esistono funzioni da A in B surgettive se e solo se $m \geq n$.

Ma stiamo usando qualche ipotesi non scritta su m ed n? (m, n FINITI)

(a) SIA $m \leq n$

PER OGNI M-PLA $a_1, a_2, \dots, a_m$ CON $a_i \in A$ $a_i \neq a_j$

E PER OGNI M-PLA $b_1, b_2, \dots, b_m$ CON $b_i \in B$ $b_i \neq b_j$

SI DEF. f T.C. $f(a_i) = b_i$ $i = 1, m$

$\Rightarrow f(a_i) = f(a_j) \Rightarrow a_i = a_j$

SIA $m > n$

PER OGNI M-PLA $a_1, a_2, \dots, a_m$ CON $a_i \in A$ $a_i \neq a_j$

E PER OGNI N-PLA $b_1, b_2, \dots, b_n$ CON $b_i \in B$ $b_i \neq b_j$

SI DEF. f T.C. $\begin{cases} f(a_i) = b_i & i = 1, n \\ f(a_j) = b_K & j = n+1, m \quad K \in \{1, 2, \dots, n\} \end{cases}$

$\Rightarrow \exists b \in B \quad a' \in A \quad a'' \in A \quad a' \neq a'' \quad f(a') = f(a'')$

(b) SIA $m < n$

PER OGNI M-PLA $a_1, a_2, \dots, a_m$ CON $a_i \in A$ $a_i \neq a_j$

E PER OGNI M-PLA $b_1, b_2, \dots, b_m$ CON $b_i \in B$ $b_i \neq b_j$

SI DEF. f T.C. $f(a_i) = b_i$ $i = 1, m$

$\Rightarrow \exists b' \in B$ T.C. $\nexists a' \in A$ T.C. $f(a') = b'$

SIA $m \geq n$

PER OGNI N-PLA $a_1, a_2, \dots, a_n$ CON $a_i \in A$ $a_i \neq a_j$

E PER OGNI N-PLA $b_1, b_2, \dots, b_n$ CON $b_i \in B$ $b_i \neq b_j$

SI DEF. f T.C. $\begin{cases} f(a_i) = b_i & i = 1, n \\ f(a_j) = b_K & j = n+1, m \quad K \in \{1, 2, \dots, n\} \end{cases}$

$\Rightarrow \forall b' \in B \ \exists a' \in A$ T.C. $f(a') = b'$

8. Sia A un insieme finito. Dimostrare che una funzione $f : A \to A$ è iniettiva se e solo se è surgettiva.

$A = \{ a_1, a_2, \dots, a_n \}$

$f : A \to A \qquad \forall a_i \in A \quad \exists f(a_i) \in A$

$\underline{f \text{ INIETTIVA}}$: $a_i \neq a_j \Rightarrow f(a_i) \neq f(a_j)$

$\Rightarrow \forall a_j \in A \quad \exists a_i \in A \quad f(a_i) = a_j$

$\rightsquigarrow$ f É SURGETTIVA

$f \, \underline{\text{SURGETTIVA}}$: $\forall a_j \in A \quad \exists a_i \in A \quad f(a_i) = a_j$

$f(a_i) = f(a_j) \Rightarrow a_i = a_j$

$\rightsquigarrow$ f É INIETTIVA

$\rightsquigarrow$ f INIETTIVA $\Leftrightarrow$ f SURGETTIVA