BY GIMUSI 27/02/15

Numeri reali 1

Argomenti: ragionamento astratto, numeri reali **Difficoltà**: $\star\star\star\star$

Prerequisiti: definizione di campo

1. (a) Dimostrare che un campo in cui $1 = 0$ ha un solo elemento.
   (b) Dimostrare che in un campo con almeno due elementi lo 0 non è invertibile (rispetto al prodotto).
2. (Tutto quello che abbiamo sempre usato, ma che negli assiomi di campo non compare)
   Sia $\mathbb{K}$ un campo. Quantificare bene e dimostrare le seguenti proprietà (attenzione ad usare solo gli assiomi presenti nella definizione di campo).
   - Se $a + c = b + c$, allora $a = b$ (legge di semplificazione per la somma).
   - Se $ac = bc$ e $c \neq 0$, allora $a = b$ (legge di semplificazione per il prodotto).
   - L'elemento 0 è unico.
   - $a \cdot 0 = 0$.
   - Se $ab = 0$, allora $a = 0$ oppure $b = 0$ (legge di annullamento del prodotto).
   - L'opposto è unico, cioè per ogni $a \in \mathbb{K}$ esiste un unico $b \in \mathbb{K}$ tale che $a + b = 0$. Capire perché solo da questo momento in poi siamo autorizzati a scrivere $-a$.
   - $-(-a) = a$.
   - L'elemento 1 è unico.
   - Il reciproco è unico, cioè per ogni $a \in \mathbb{K}$, con $a \neq 0$, esiste un unico $b \in \mathbb{K}$ tale che $ab = 1$ (solo da questo momento in poi siamo autorizzati a scrivere $1/a$.
   - $1/(1/a) = a$ per ogni $a \neq 0$.
   - $(1/a) \cdot (1/b) = 1/(a \cdot b)$.
   - $(-1) \cdot (-1) = 1$.
   - $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$ e $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$ per ogni a e b in $\mathbb{K}$.
   - $2 + 2 = 4$ (ma cosa vuol dire?).
3. (Tutto quello che abbiamo sempre usato tranquillamente, ma che negli assiomi dei numeri reali non compare)
   Sia $\mathbb{K}$ un campo ordinato. Quantificare bene e dimostrare le seguenti proprietà (attenzione ad usare solo gli assiomi algebrici e di ordinamento e non altre proprietà "usuali").
   - Se $a \geq b$ e $c \geq d$, allora $a + c \geq b + d$ (qual è l'analogo per il prodotto?).
   - Se $x \geq y$ e $z \leq 0$, allora $xz \leq yz$.
   - Se $a > 0$, allora $-a < 0$.
   - Se $a > 0$, allora $1/a > 0$.
   - $1 > 0$.
   - $1/2 < 1$.

1/5

1. (a) Dimostrare che un campo in cui $1 = 0$ ha un solo elemento.
   (b) Dimostrare che in un campo con almeno due elementi lo 0 non è invertibile (rispetto al prodotto).

(a) PROPRIETÀ DI UN CAMPO (ASSIOMI ALGEBRICI)

S.1	$a+0=a$	P.1	$a\cdot 1=a$
S.2	$a+(-a)=0$	P.2	$a\cdot(a^{-1})=1 \quad a\neq 0$
S.3	$a+b=b+a$	P.3	$a\cdot b=b\cdot a$
S.4	$a+(b+c)=(a+b)+c$	P.4	$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$
D	$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$		

SIA $1=0$ E SUPPONIAMO CHE $\exists\, x\neq 0$

$$\left.\begin{aligned} &x\cdot(1+0)\overset{D}{=}x\cdot 1+x\cdot 0\\ &x\cdot(\overset{S.1}{0})=x\cdot 0\end{aligned}\right\}\Rightarrow x\cdot 1=0 \overset{P.1}{\Rightarrow} x=0$$

(b) SIA $1\neq 0$ E SUPPONIAMO CHE $\exists\, x=0^{-1}$

$$\left\{\begin{aligned} &0\cdot x\overset{P.2}{=}1\\ &x\cdot 0=x(1+(-1))=x+(-1)x=x+(-x)=0\end{aligned}\right.\Rightarrow 0=1$$

2. (Tutto quello che abbiamo sempre usato, ma che negli assiomi di campo non compare)
   Sia $\mathbb{K}$ un campo. Quantificare bene e dimostrare le seguenti proprietà (attenzione ad usare solo gli assiomi presenti nella definizione di campo).

- Se $a+c=b+c$, allora $a=b$ (legge di semplificazione per la somma).

$$a+c=b+c \Rightarrow a+c+(-c)=b+c+(-c) \Rightarrow a+0=b+0$$
$$\Rightarrow a=b$$

- Se $ac=bc$ e $c\neq 0$, allora $a=b$ (legge di semplificazione per il prodotto).

$$ac=bc \quad c\neq 0 \Rightarrow a\cdot c\cdot c^{-1}=b\cdot c\cdot c^{-1} \Rightarrow a\cdot 1=b\cdot 1 \Rightarrow a=b$$

- L'elemento 0 è unico.

$$a+\alpha=a \Rightarrow a+(-a)+\alpha=a+(-a) \Rightarrow 0+\alpha=0 \Rightarrow \alpha=0$$

- $a\cdot 0=0$.

$$a\cdot 0 = a\cdot(1+(-1)) = a\cdot 1+a\cdot(-1) = a+(-a) = 0$$

$$a\cdot(-1)+a = a\cdot(-1)+a\cdot 1 = a((-1)+1) = a\cdot 0 = 0 \Rightarrow a\cdot(-1)=-a$$

- Se $ab=0$, allora $a=0$ oppure $b=0$ (legge di annullamento del prodotto).

$$a=0 \Rightarrow ab=(1+(-1))b = 1\cdot b+(-1)b = b+(-b) = 0 \quad \forall b$$

$$b=0 \Rightarrow ab=0 \quad \forall a$$

$$a=0 \wedge b=0 \Rightarrow ab = b+(-b) = 1+(-1)+1+(-1) = 0$$

- L'opposto è unico, cioè per ogni $a \in \mathbb{K}$ esiste un unico $b \in \mathbb{K}$ tale che $a+b=0$. Capire perché solo da questo momento in poi siamo autorizzati a scrivere $-a$.

$$a+b=0 \wedge a+c=0 \Rightarrow a+b=a+c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a+b+(-a) = a+c+(-a) \Rightarrow b+0=c+0 \Rightarrow b=c$$

- $-(-a)=a$.

$$(-a)+(-(-a))=0 \Rightarrow (-a)+(-(-a))+a=0+a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -(-a)+0 = a \Rightarrow -(-a)=a$$

- L'elemento 1 è unico.

$$a\cdot\alpha=\alpha\cdot a=a \Rightarrow \alpha\cdot a\cdot(a^{-1}) = a\cdot(a^{-1}) \Rightarrow \alpha\cdot 1=1 \Rightarrow \alpha=1$$

- Il reciproco è unico, cioè per ogni $a \in \mathbb{K}$, con $a \neq 0$, esiste un unico $b \in \mathbb{K}$ tale che $ab=1$ (solo da questo momento in poi siamo autorizzati a scrivere $1/a$.

$$ab=1 \wedge ac=1 \Rightarrow ab=ac \Rightarrow b=c$$

- $1/(1/a)=a$ per ogni $a\neq 0$.

$$[1/(1/a)]\cdot(1/a)=1 \Rightarrow [1/(1/a)]\cdot(1/a)\cdot a = 1\cdot a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [1/(1/a)]\cdot 1 = a \Rightarrow 1/(1/a)=a$$

- $(1/a) \cdot (1/b) = 1/(a \cdot b)$.

$$(1/a)\cdot(1/b)\cdot b = (1/a)\cdot 1 = 1/a \Rightarrow (1/a)\cdot(1/b)\cdot b\cdot a = 1/a \cdot a = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1/a)\cdot(1/b) = 1/(a\cdot b)$$

- $(-1) \cdot (-1) = 1$.

$$(-1)\cdot(-1) = (-1)(-1) + 0 = (-1)(-1) + (-1) + 1 =$$
$$= (-1)(-1) + (1)(-1) + 1 = (-1)[(-1) + (1)] + 1 = (-1)\cdot 0 + 1 = 1$$

- $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$ e $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$ per ogni a e b in $\mathbb{K}$.

$$(-a)\cdot b + (a\cdot b) = b((-a)+a) = b\cdot 0 = 0 \Rightarrow -a(b) = -(ab)$$

- $2 + 2 = 4$ (ma cosa vuol dire?).

$1+1 \neq 0 \quad 1+1 \neq 1 \Rightarrow$ DEF. $1+1 = 2$

$2+1 \neq 2$ DEF. $2+1 = 1+1+1 = 3 \quad 3+1 \neq$

$3+1 \neq 3$ DEF. $3+1 = 1+1+1+1 = 2+2 = 4$

3. (Tutto quello che abbiamo sempre usato tranquillamente, ma che negli assiomi dei numeri reali non compare)

   Sia $\mathbb{K}$ un campo ordinato. Quantificare bene e dimostrare le seguenti proprietà (attenzione ad usare solo gli assiomi algebrici e di ordinamento e non altre proprietà "usuali").

   - Se $a \geq b$ e $c \geq d$, allora $a + c \geq b + d$ (qual è l'analogo per il prodotto?).

$$\begin{cases} a \geq b \Rightarrow a + c \geq b + c \quad \forall c \in \mathbb{K} & \text{(ASSIOMA)} \\ c \geq d \Rightarrow c + b \geq d + b & \text{(ASSIOMA)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a + c \geq b + c \geq b + d$$

PER PRODOTTO: $a \geq b \geq 0 \wedge c \geq d \geq 0 \Rightarrow a\cdot c \geq b \cdot d$

$$\begin{cases} a \geq b \wedge c \geq 0 \Rightarrow a\cdot c \geq b\cdot c \quad \forall c \in \mathbb{K} & \text{(ASSIOMA)} \\ c \geq d \wedge b \geq 0 \Rightarrow bc \geq b\cdot d \quad \forall b \in \mathbb{K} & \text{(ASSIOMA)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a\cdot c \geq b\cdot c \geq b\cdot d$$

5/5

- Se $x \geq y$ e $z \leq 0$, allora $xz \leq yz$.

$x \geq y \wedge z \leq 0$ CONSIDERIAMO xz E yz

ASSIOMA : $xz \leq yz \vee xz \geq yz$

MA $xz \geq yz \Leftrightarrow z \geq 0$ (ASSIOMA)

$\Rightarrow xz \leq yz$

- Se $a > 0$, allora $-a < 0$.

$a > 0 \vee -1 < 0 \Rightarrow -1 \cdot a < -1 \cdot 0$ $\quad -a < 0$

- Se $a > 0$, allora $1/a > 0$.

$$a > 0 \text{ CONSIDERIAMO } \frac{1}{a} \begin{cases} > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} \cdot a = 1 > 0 \\ < 0 \Rightarrow \frac{1}{a} \cdot a = 1 < 0 \text{ ASSURDO} \end{cases}$$

- $1 > 0$.

$$\begin{cases} 1 > 0 \Rightarrow 1 \cdot 1 > 1 \cdot 0 = 0 \Rightarrow 1 > 0 \\ 1 < 0 \Rightarrow 0 > 1 \Rightarrow 1 \cdot 0 < 1 \cdot 1 \Rightarrow 0 < 1 \text{ ASSURDO} \end{cases}$$

- $1/2 < 1$.

$$\begin{cases} 1/2 > 1 \Rightarrow 2 \cdot 1/2 > 2 \cdot 1 \Rightarrow 1 > 2 \Leftrightarrow 0 > 1 \text{ ASSURDO} \\ 1/2 < 1 \Rightarrow 2 \cdot 1/2 < 2 \cdot 1 \Rightarrow 1 < 2 \Leftrightarrow 0 < 1 \end{cases}$$