Università di Pisa - Corso di Laurea in Matematica

Prova in itinere di Analisi Matematica 1

Pisa, 28 Novembre 2014

(Problemi da 3 punti)

1. Consideriamo la funzione $f(x) = |2^{-x} - 1|$, pensata come $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
   Calcolare l'immagine e la controimmagine di $(-\infty, 1]$.

2. Calcolare il limite della successione $\sqrt[n]{\binom{2n}{n}}$.

3. Determinare lo sviluppo di Taylor di ordine 4, con centro nell'origine, della funzione $f(x) = e^{\sin(2x)}$.

4. Calcolare
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + 2^n \cdot (-1)^n}{5^n}.$$

(Problemi da 8 punti)

5. Studiare, al variare del parametro reale λ, l'iniettività e la surgettività della funzione $f_\lambda : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da
$$f_\lambda(x) = \log x - \lambda \arctan x.$$

6. Consideriamo la successione
$$a_n = \frac{1}{n^2} \sin \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n^2}.$$
   (a) Determinare se definitivamente si ha che $a_n > 0$ oppure $a_n < 0$.
   (b) Studiare, al variare del parametro reale α, la convergenza della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^\alpha.$$

7. (a) Dimostrare che per ogni intero $n \geq 1$ esiste una costante $c > 0$ tale che
$$2^x \geq c(\arctan x + x^n) \qquad \forall x \geq 0. \tag{1}$$
   (b) Determinare se esiste una costante $c > 0$ tale che
$$2^x \geq c(\arctan x + x^n) \qquad \forall x \geq 0 \quad \forall n \geq 1.$$
   (c) Detta c_n la più grande costante reale per cui vale la (1), calcolare il limite della successione $c_n \cdot n!$.