BY GIMUSI 30/11/13

Spazi vettoriali – Esercizi teorici 2

Argomenti: consolidamento della teoria, ragionamento astratto **Difficoltà**: ⋆⋆⋆⋆

Prerequisiti: definizione di campo e di spazio vettoriale

---

1. Questo esercizio serve per familiarizzare con gli assiomi di campo e di spazio vettoriale senza farsi distrarre, ed in fondo confondere, dai simboli standard per somma e prodotto.

   (a) Enunciare le proprietà delle operazioni in uno spazio vettoriale indicando con $\diamondsuit$ la somma nel campo, con $\heartsuit$ il prodotto nel campo, con $\clubsuit$ la somma nello spazio vettoriale, e con $\spadesuit$ il prodotto tra elementi del campo ed elementi dello spazio vettoriale. Usare notazioni diverse per lo 0 nel campo e nello spazio vettoriale.

   (b) Enunciare le proprietà delle operazioni in uno spazio vettoriale utilizzando le seguenti notazioni: $\mathrm{Ksum}(a, b)$ e $\mathrm{Kprod}(a, b)$ indicano la somma ed il prodotto di a e b nel campo, $\mathrm{Vsum}(u, v)$ indica la somma di due elementi u e v dello spazio vettoriale, e $\mathrm{KVprod}(a, v)$ indica il prodotto del vettore v per lo scalare a. Precisare anche insiemi di partenza ed arrivo delle 4 funzioni, ad esempio $\mathrm{Ksum} : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}$.

2. Dimostrare le seguenti proprietà a partire dagli assiomi presenti nella definizione di campo e di spazio vettoriale.

   (a) Se $u + w = v + w$, allora $u = v$.

   (b) Lo 0 è unico.

   (c) L'opposto è unico, cioè per ogni $v \in V$ esiste un unico $w \in V$ tale che $v + w = 0$. Capire perché solo da questo momento in poi siamo autorizzati a parlare di $-v$.

   (d) $-(-v) = v$

   (e) $0 \cdot v = 0$ per ogni $v \in V$ e $a \cdot 0 = 0$ per ogni $a \in \mathbb{K}$ (attenzione alla scrittura volutamente ambigua di 0: chiarire di volta in volta quando si intende lo 0 di V e quando si intende lo 0 di $\mathbb{K}$).

   (f) $(-1) \cdot v = -v$ (attenzione all'uso ambiguo del segno $-$).

3. Siano u, v e w tre vettori di uno spazio vettoriale tali che $u + 3w = 4u + v$. Ci sembra naturale dedurre che $u = w - (1/4)v$.

   Giustificare per bene questa deduzione, esplicitando quali assiomi si stanno usando in ogni passaggio.

1. Questo esercizio serve per familiarizzare con gli assiomi di campo e di spazio vettoriale senza farsi distrarre, ed in fondo confondere, dai simboli standard per somma e prodotto.

   (a) Enunciare le proprietà delle operazioni in uno spazio vettoriale indicando con $\diamondsuit$ la somma nel campo, con $\heartsuit$ il prodotto nel campo, con $\clubsuit$ la somma nello spazio vettoriale, e con $\spadesuit$ il prodotto tra elementi del campo ed elementi dello spazio vettoriale. Usare notazioni diverse per lo 0 nel campo e nello spazio vettoriale. $\underline{0}$

   (b) Enunciare le proprietà delle operazioni in uno spazio vettoriale utilizzando le seguenti notazioni: Ksum(a, b) e Kprod(a, b) indicano la somma ed il prodotto di a e b nel campo, Vsum(u, v) indica la somma di due elementi u e v dello spazio vettoriale, e KVprod(a, v) indica il prodotto del vettore v per lo scalare a. Precisare anche insiemi di partenza ed arrivo delle 4 funzioni, ad esempio Ksum : $\mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}$.

(a)

S1 $V \triangle W = W \triangle V$

S2 $V \triangle (W \triangle Z) = (V \triangle W) \triangle Z$

S3 $\exists \, \underline{0}$ t.c. $V \triangle \underline{0} = V$

S4 $\forall V \, \exists W$ t.c. $V \triangle W = \underline{0}$

P1 $1 \nabla V = V$

P2 $a \nabla (b \nabla V) = (a \boxtimes b) \nabla V$

P3 $(a \oplus b) \nabla V = (a \nabla V) \triangle (b \nabla V)$

P4 $a \nabla (V \triangle W) = (a \nabla V) \triangle (a \nabla W)$

(b)

S1 $VSUM(V, W) = VSUM(W, V)$

S2 $VSUM(V, VSUM(W, Z)) = VSUM(VSUM(V, W), Z)$

S3 $\exists \, \underline{0}$ t.c. $VSUM(V, \underline{0}) = V$

S4 $\forall V \, \exists W$ t.c. $VSUM(V, W) = \underline{0}$

P1 $KVPROD(1, V) = V$

P2 $KVPROD(a, KVPROD(b, V)) = KVPROD(KPROD(a, b), V)$

P3 $KVPROD(KSUM(a, b), V) = VSUM(KVPROD(a, V), KVPROD(b, V))$

P4 $KVPROD(a, VSUM(V, W)) = VSUM(KVPROD(a, V), KVPROD(a, W))$

KSUM $\mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}$ VSUM $V^2 \to V$

KPROD $\mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}$ KVPROD $\mathbb{K} \times V \to V$

2. Dimostrare le seguenti proprietà a partire dagli assiomi presenti nella definizione di campo e di spazio vettoriale.

   (a) Se $u + w = v + w$, allora $u = v$.

   (b) Lo 0 è unico.

   (c) L'opposto è unico, cioè per ogni $v \in V$ esiste un unico $w \in V$ tale che $v + w = 0$. Capire perché solo da questo momento in poi siamo autorizzati a parlare di $-v$.

   (d) $-(-v) = v$

   (e) $0 \cdot v = 0$ per ogni $v \in V$ e $a \cdot 0 = 0$ per ogni $a \in \mathbb{K}$ (attenzione alla scrittura volutamente ambigua di 0: chiarire di volta in volta quando si intende lo 0 di V e quando si intende lo 0 di $\mathbb{K}$).

   (f) $(-1) \cdot v = -v$ (attenzione all'uso ambiguo del segno $-$).

(a) $u+w=v+w \Rightarrow u=v$ $\quad w+z=0$ $\quad u+\cancel{w}+\cancel{z}=v+\cancel{w}+\cancel{z}$

$\Rightarrow u+0=v+0 \Rightarrow u=v$

(b) 0 È UNICO $\quad v+0=v \quad v+z=v \quad v+u=0$

$\Rightarrow \cancel{v}+z+\cancel{u}=\cancel{v}+\cancel{u} \Rightarrow z+0=0 \Rightarrow z=0$

(c) L'OPPOSTO È UNICO $\quad v+u=0 \quad v+w=0$

$\Rightarrow \cancel{v}+w+\cancel{u}=0+u \Rightarrow w+0=u \Rightarrow w=u=-v$

(d) $-(-v)=v \quad (-v)+b=0 \quad v+(-v)+b=0+v$

$\Rightarrow b+0=v \Rightarrow b=v \Rightarrow v=-(-v)$

(e) $0\cdot v=0 \quad av+(-av)=0 \Rightarrow (a+(-a))\cdot v=0 \Rightarrow 0\cdot v=0$

$a\cdot 0=0 \quad av+(-av)=0 \Rightarrow a(v+(-v))=0 \Rightarrow a\cdot 0=0$

(f) $(-1)\cdot v=-v \quad (1+(-1))\cdot v=0 \Rightarrow 1\cdot v+(-1)\cdot v=0$

$\Rightarrow v+(-1)\cdot v=0 \Rightarrow \cancel{v}+(-1)\cdot v+\cancel{(-v)}=0+(-v) \Rightarrow (-1)\cdot v=-v$

3. Siano u, v e w tre vettori di uno spazio vettoriale tali che $u + 3w = 4u + v$. Ci sembra naturale dedurre che $u = w - (1/4)v$.

   Giustificare per bene questa deduzione, esplicitando quali assiomi si stanno usando in ogni passaggio.

$u+3w=4u+v \quad u+\cancel{3w}+\cancel{(-3w)}+(-4u)=\cancel{4u}+v+(-3w)+\cancel{(-4u)}$

$\Rightarrow u+(-4u)=v+(-3w) \Rightarrow u-4u=v-3w \Rightarrow -3u=v-3w$

$\Rightarrow 3u=3w-v \Rightarrow \frac{1}{3}(3u)=\frac{1}{3}(3w-v) \Rightarrow u=w-(1/3)v$