BY GIMUSI 08/07/15

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica

Scritto d'esame di Analisi Matematica II

Pisa, ?? ?? ????

1. Siano $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2y + yz = 1,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$ e $f(x, y, z) = x^2 + y + z^2$.
   (a) Provare che D NON è limitato.
   (b) Calcolare estremo inferiore e superiore di f in D precisando se si tratta di minimo e/o massimo.

2. Sia T il triangolo di $\mathbb{R}^2$ di vertici $(0, 0)$, $(1, 2)$, $(2, 0)$. Calcolare estremo inferiore e superiore della funzione $f(x, y) = |3y - x^2|$ in T precisando se si tratta di minimo e/o massimo e determinando anche gli eventuali punti di minimo/massimo.

3. Sia B la sfera di R^3 di centro $(1, 2, -1)$ e raggio 2. Calcolare
$$\int_B (x + z^2 - y)\, dx\, dy\, dz.$$

4. Sia γ la curva definita da
$$(x(t), y(t)) = (\sin^2 t, t \sin t), \qquad 0 \leq t \leq \pi.$$
   (a) Provare che γ è chiusa e semplice e farne un disegno approssimativo.
   (b) Sia D il dominio racchiuso da γ. Calcolare $\int_D x\, dx\, dy$.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.

1. Siano $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2y + yz = 1,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$ e $f(x,y,z) = x^2 + y + z^2$.

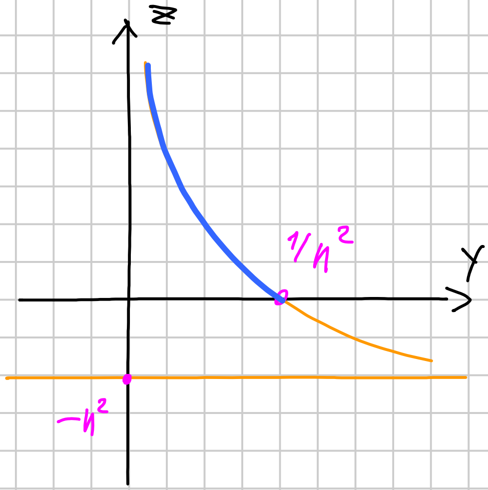
(a) Provare che D NON è limitato.

(b) Calcolare estremo inferiore e superiore di f in D precisando se si tratta di minimo e/o massimo.

(a) $x^2y + yz = 1 \qquad x^2 = \dfrac{1-yz}{y} = \dfrac{1}{y} - z \qquad y \neq 0$ (y=0 NO SOL.)

$$\lim_{\substack{y \to 0^+ \\ z=0}} x^2 = \lim_{\substack{y\to 0^+ \\ z=0}} \frac{1}{y} - z = +\infty \rightsquigarrow D \text{ NON È LIMITATO}$$

$x = k \qquad k^2y + yz = 1 \qquad y(z + k^2) = 1$



(b) $f(x,y,z) = x^2 + y + z^2$

$$\lim_{\substack{y\to 0^+ \\ z=0}} f(x,y,z) = \lim_{\substack{y \to 0^+ \\ z=0}} \underbrace{x^2}_{\to +\infty} + \underbrace{y}_{\to 0} + \underbrace{z^2}_{\to 0} = +\infty$$

$\rightsquigarrow \sup f = +\infty$

STUDIO AL BORDO DEL BORDO

$x^2y + yz = 1 \quad x \in (-\infty, +\infty) \quad y \in (0, +\infty) \quad z \in [0, +\infty] \quad z + x^2 \neq 0$

$$\begin{cases} x \to \pm\infty \rightsquigarrow y \to 0^+ \quad z \in [0, +\infty] \rightsquigarrow f \to +\infty \\ z \to +\infty \rightsquigarrow y \to 0^+ \quad x \in (-\infty, +\infty) \rightsquigarrow f \to +\infty \\ y \to +\infty \rightsquigarrow x \to 0 \quad z \to 0^+ \rightsquigarrow f \to +\infty \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow \lim_{\substack{x^2+y^2+z^2 \to +\infty \\ x^2y + yz = 1}} f(x,y,z) = +\infty$$

INOLTRE f È CONTINUA $\rightsquigarrow \exists$ MINIMO = INF

× TEOREMA DI WEIERSTRASS GENERALIZZATO

MOLT. DI LAGRANGE

$\Phi = x^2y + yz - 1 = 0$

SISTEMA 1

$$\begin{cases} \Phi_x = 2xy = 0 \\ \Phi_y = x^2 + z = 0 \\ \Phi_z = y = 0 \\ \Phi = x^2y + yz - 1 = 0 \quad -1 = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \emptyset$$

SISTEMA 2

$$\begin{cases} f_x = 2x = \lambda \cdot 2xy \qquad 2x(1-\lambda y) = 0 \\ f_y = 1 = \lambda \cdot (x^2+z) \\ f_z = 2z = \lambda \cdot y \\ \Phi = x^2y + yz - 1 = 0 \end{cases}$$

$$x = 0 \quad \begin{cases} 1 = \lambda z \rightsquigarrow y = \lambda yz \\ 2z = \lambda y \rightsquigarrow 2z^2 = \lambda yz \\ yz = 1 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} y = 2z^2 \\ y = 1/z \end{cases} \quad z^3 = \frac{1}{2} \quad z = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

$$y = \sqrt[3]{2} \quad \rightsquigarrow P_1 = (0, \sqrt[3]{2}, 1/\sqrt[3]{2})$$

$$1 - \lambda y = 0 \quad \begin{cases} 1 = \lambda(x^2+z) \\ 2z = 1 \\ x^2y + yz - 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (x^2+z) = 1/\lambda = y \\ z = 1/2 \\ (x^2+z)y = 1 \end{cases} \rightsquigarrow y^2 = 1 \quad y = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{2} \quad x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \rightsquigarrow P_{2,3} = \left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$$

$$f(P_1) = 0 + \sqrt[3]{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{5}} \simeq 1{,}90 \qquad f(P_{2,3}) = \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{5} = \frac{2+5+1}{5} = \frac{7}{5} = 1{,}75$$

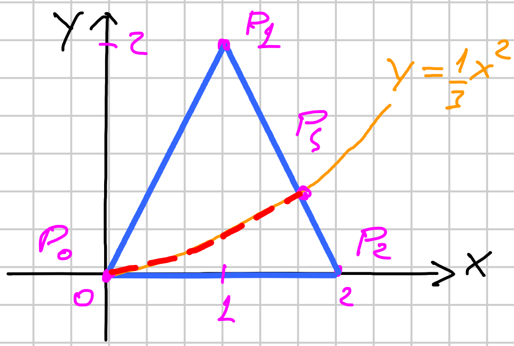
$\rightsquigarrow$ MIN f = INF f = $7/5$ IN P_2 E P_3

2. Sia T il triangolo di $\mathbb{R}^2$ di vertici $(0,0)$, $(1,2)$, $(2,0)$. Calcolare estremo inferiore e superiore della funzione $f(x,y) = |3y - x^2|$ in T precisando se si tratta di minimo e/o massimo e determinando anche gli eventuali punti di minimo/massimo.

TEOREMA DI WEIERSTRASS

f CONTINUA E T COMPATTO $\rightsquigarrow$ $\exists$ MAX (=SUP) E MIN (=INF)

PUNTI INTERNI



CONSIDERIAMO $g(x,y) = 3y - x^2$

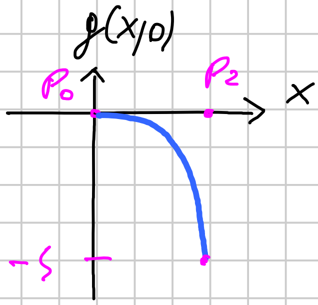
$$\begin{cases} g_x = -2x = 0 \\ g_y = 3 = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \text{NON CI SONO PUNTI STAZIONARI INTERNI}$$

$g(x,y) = 0 \rightsquigarrow y = \frac{x^2}{3}$ PARABOLA PER L'ORIGINE

ANNULLAMENTO DI g E f PER $P \in \overset{\frown}{P_0 P_5}$

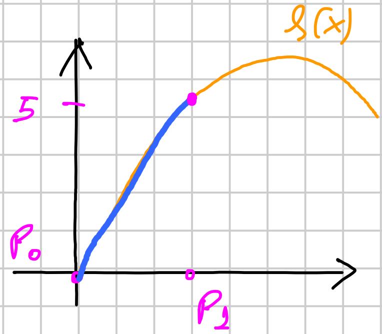
STUDIO AI BORDI

TRATTO $P_0 P_2$: $y = 0$ $\quad g(x,0) = -x^2$



$$\begin{cases} g_{MIN} = -5 \text{ IN } P_2 \\ g_{MAX} = 0 \text{ IN } P_0 \end{cases}$$

TRATTO $P_0 P_1$: $y = 2x$ $\quad g(x,2x) = s(x) = 6x - x^2$

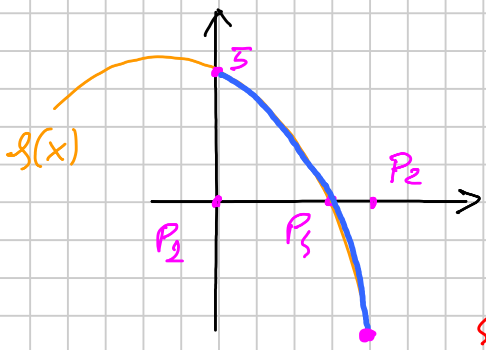


$s'(x) = 6 - 2x = 0 \quad x = 3$

$$\begin{cases} g_{MAX} = 5 \text{ IN } P_1 \\ g_{MIN} = 0 \text{ IN } P_0 \end{cases}$$

TRATTO $P_1 P_2$: $y = -2x + 5$ $\quad g(x, -2x+5) = s(x) = -6x + 12 - x^2$

$s'(x) = -6 - 2x = 0 \quad x = -3$



$$\begin{cases} g_{MAX} = 5 \text{ IN } P_1 \\ g_{MIN} = -5 \text{ IN } P_2 \end{cases}$$

$$g(x)=0 \qquad x=\frac{-6\pm\sqrt{36+48}}{2}=-3\pm\sqrt{21}$$

$$y=-2x+4 = 4+6\mp 2\sqrt{21}$$

$$\rightsquigarrow P_3=\left(-3+\sqrt{21},\ 10-2\sqrt{21}\right)$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} \sup f=\max f=\max|g|=5 \ \text{ IN } \ P_2(1,2) \\ \inf f=\min f=\min|g|=0 \ \text{ IN } \ P(x,y):\ y=\frac{x^2}{3} \quad 0\le x\le -3+\sqrt{21} \end{cases}$$

3. Sia B la sfera di R^3 di centro $(1,2,-1)$ e raggio 2. Calcolare

$$\int_B (x+z^2-y)\,dx\,dy\,dz.$$

$$B:\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ (x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2\le 4$$

CAMBIO DI VARIABILI: $\begin{cases} x-1=\mu \\ y-2=v \\ z+1=w \end{cases} \quad \begin{cases} x=\mu+1 \\ y=v+2 \\ z=w-1 \end{cases}$

$$B':\ (\mu,v,w)\in\mathbb{R}^3:\ \mu^2+v^2+w^2\le 4$$

$$dx\,dy\,dz = d\mu\,dv\,dw \quad (\text{TRASLAZIONE ASSI})$$

$$\int_B (x+z^2-y)\,dx\,dy\,dz = \int_{B'} [\mu+1+(w-1)^2-v-2]\,d\mu\,dv\,dw =$$

$$=\int_{B'} (\mu+v-2w+w^2)\,d\mu\,dv\,dw =$$

$$=\underbrace{\int_{B'} \cancel{(\mu+v-2w)}\,d\mu\,dv\,dw}^{=0\ \times\ \text{SIMMETRIA}} + \int_{B'} w^2\,d\mu\,dv\,dw =$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^2 \rho^2\sin^2\varphi\cdot\rho^2\cos\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta = 2\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2 \rho^4\sin^2\varphi\cos\varphi\,d\rho\,d\varphi =$$

$$=2\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi\cos\varphi\left[\rho^5/5\right]_0^2 d\varphi = 2\pi\cdot\frac{32}{5}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\,d(\sin\varphi) =$$

$$=\frac{64}{5}\pi\left[\sin^3\varphi/3\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{64}{15}\pi\left(1-(-1)\right)=\frac{128}{15}\pi$$

4. Sia γ la curva definita da

$$(x(t), y(t)) = (\sin^2 t, t\sin t), \qquad 0 \le t \le \pi.$$

(a) Provare che γ è chiusa e semplice e farne un disegno approssimativo.

(b) Sia D il dominio racchiuso da γ. Calcolare $\int_D x\,dx\,dy$.

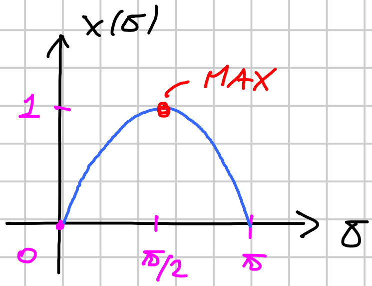
(a) $\gamma(0) = (0,0) = \gamma(\pi) \rightsquigarrow$ γ È CHIUSA

SIANO $s \neq \delta$ $\quad \gamma(s) = \gamma(\delta) \rightsquigarrow \begin{cases} \operatorname{sen}^2\delta = \operatorname{sen}^2 s \rightsquigarrow s = \pi - \delta \\ \delta \operatorname{sen}\delta = s \operatorname{sen} s \end{cases}$

$\delta \operatorname{sen}\delta = (\pi - \delta)\operatorname{sen}(\pi-\delta) = (\pi-\delta)\operatorname{sen}\delta \qquad (2\delta - \pi)\operatorname{sen}\delta = 0$

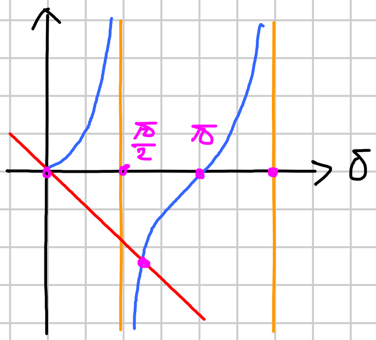
$\begin{cases} \operatorname{sen}\delta = 0 \rightsquigarrow \delta = \pi/2 \quad s = \pi/2 \\ 2\delta - \pi = 0 \rightsquigarrow \delta = \pi/2 \quad s = \pi/2 \end{cases} \rightsquigarrow$ γ È SEMPLICE

$x(\delta) = \operatorname{sen}^2\delta \qquad x_{MAX} = 1 \quad \delta = \pi/2$



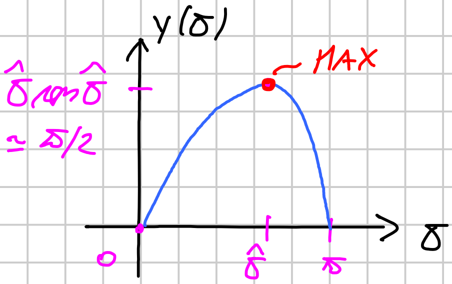
$y(\delta) = \delta \operatorname{sen}\delta \qquad y'(\delta) = \operatorname{sen}\delta + \delta\cos\delta$

$y'(\delta) = 0 \quad \operatorname{sen}\delta + \delta\cos\delta = 0 \quad \operatorname{tg}\delta = -\delta$

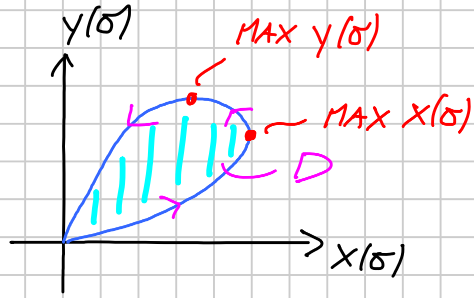


$\rightsquigarrow \delta = 0$

$\delta = \hat{\delta} \qquad \frac{\pi}{2} < \hat{\delta} < \pi$



$\begin{cases} \text{MAX } x(\delta) \text{ PER } \delta = \frac{\pi}{2} \\ \text{MAX } y(\delta) \text{ PER } \delta = \hat{\delta} > \frac{\pi}{2} \end{cases} \rightsquigarrow$ SENSO DI PERC. ANTIORARIO



(b) $\int_D x\,dx\,dy$ $\qquad\qquad$ $\int_\Omega \mathrm{div}\,\vec{E}\,dx\,dy = \int_{\partial\Omega} \vec{E}\cdot\vec{n}\,dS$

SIA $\vec{E} = (\overset{A}{0}, \overset{B}{xy}) \rightsquigarrow \mathrm{div}\,\vec{E} = x$

SENSO DI PERCORRENZA ANTIORARIO SU

$$\int_D x\,dx\,dy \overset{\downarrow}{=} \int_{\partial D} A\,dy - B\,dx = -\int_{\partial D} xy\,dx =$$

$$= -\int_0^\pi \sin^2\theta \cdot \theta \sin\theta \cdot (2\sin\theta\cos\theta)\,d\theta = -\int_0^\pi \underbrace{2\theta}_{f} \overbrace{\sin^4\theta\cos\theta}^{g'}\,d\theta =$$

$$\int \sin^4\theta\cos\theta\,d\theta = \int \sin^4\theta\,d(\sin\theta) = \frac{1}{5}\sin^5\theta$$

$$= -\left[2\theta\cdot\left(\frac{1}{5}\sin^5\theta\right)\right]_0^\pi + \int_0^\pi 2\left(\frac{1}{5}\sin^5\theta\right)d\theta =$$

$$= 0 + \frac{2}{5}\int_0^\pi \sin^5\theta\,d\theta = \frac{2}{5}\int_0^\pi \sin^4\theta\,d(-\cos\theta) =$$

$$= -\frac{2}{5}\int_0^\pi (1-\cos^2\theta)^2\,d(\cos\theta) = -\frac{2}{5}\int_0^\pi (1 - 2\cos^2\theta + \cos^4\theta)\,d(\cos\theta) =$$

$$= -\frac{2}{5}\left[\cos\theta - \frac{2}{3}\cos^3\theta + \frac{1}{5}\cos^5\theta\right]_0^\pi = -\frac{2}{5}\left(-1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{5} - 1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{5}\right) =$$

$$= -\frac{2}{5}\left(-2 + \frac{4}{3} - \frac{2}{5}\right) = -\frac{2}{5}\,\frac{-30+20-6}{15} = \frac{32}{75}$$