Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica

Scritto d'esame di Analisi Matematica II

Pisa, ?? ?? ????

1. Siano $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2y + yz = 1,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$ e $f(x,y,z) = x^2 + y + z^2$.
   (a) Provare che D NON è limitato.
   (b) Calcolare estremo inferiore e superiore di f in D precisando se si tratta di minimo e/o massimo.
2. Sia T il triangolo di $\mathbb{R}^2$ di vertici $(0,0)$, $(1,2)$, $(2,0)$. Calcolare estremo inferiore e superiore della funzione $f(x,y) = |3y - x^2|$ in T precisando se si tratta di minimo e/o massimo e determinando anche gli eventuali punti di minimo/massimo.
3. Sia B la sfera di R^3 di centro $(1,2,-1)$ e raggio 2. Calcolare
$$\int_B (x + z^2 - y)\,dx\,dy\,dz.$$
4. Sia γ la curva definita da
$$(x(t), y(t)) = (\sin^2 t, t\sin t), \qquad 0 \leq t \leq \pi.$$
   (a) Provare che γ è chiusa e semplice e farne un disegno approssimativo.
   (b) Sia D il dominio racchiuso da γ. Calcolare $\int_D x\,dx\,dy$.

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.

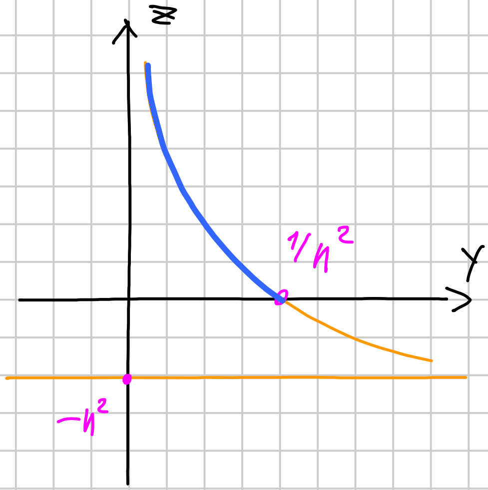
1. Siano $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2y + yz = 1,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$ e $f(x,y,z) = x^2 + y + z^2$.

(a) Provare che D NON è limitato.

(b) Calcolare estremo inferiore e superiore di f in D precisando se si tratta di minimo e/o massimo.

(a) $x^2y + yz = 1 \qquad x^2 = \dfrac{1-yz}{y} = \dfrac{1}{y} - z \qquad y \neq 0$ ($y=0$ NO SOL.)

$$\lim_{\substack{y\to 0^+\\ z=0}} x^2 = \lim_{\substack{y\to 0^+\\ z=0}} \frac{1}{y} - z = +\infty$$ $\rightsquigarrow$ D NON È LIMITATO



$x = k \qquad k^2y + yz = 1 \qquad y(z+k^2) = 1$

(b) $f(x,y,z) = x^2 + y + z^2$

$$\lim_{\substack{y\to 0^+\\ z=0}} f(x,y,z) = \lim_{\substack{y\to 0^+\\ z=0}} \underbrace{x^2}_{\to+\infty} + \underbrace{y}_{\to 0} + \underbrace{z^2}_{\to 0} = +\infty$$

$\rightsquigarrow$ $\sup f = +\infty$

$f(x,y,z) \geq 0$ CONTINUA $\rightsquigarrow \exists$ MINIMO = INF

MOLT. DI LAGRANGE $\qquad \Phi = x^2y + yz - 1 = 0$

SISTEMA 1
$$\begin{cases} \Phi_x = 2xy = 0 \\ \Phi_y = x^2 + z = 0 \\ \Phi_z = y = 0 \\ \Phi = x^2y + yz - 1 = 0 \quad -1 = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \emptyset$$

SISTEMA 2
$$\begin{cases} f_x = 2x = \lambda \cdot 2xy \qquad 2x(1 - \lambda y) = 0 \\ f_y = 1 = \lambda \cdot (x^2 + z) \\ f_z = 2z = \lambda \cdot y \\ \Phi = x^2y + yz - 1 = 0 \end{cases}$$

$x=0$ $\begin{cases} 1 = 2z \rightsquigarrow y = 2yz \\ 2z = 2y \rightsquigarrow 2z^2 = 2yz \\ yz = 1 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} y = 2z^2 \\ y = 1/z \end{cases}$ $z^3 = \frac{1}{2}$ $z = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

$y = \sqrt[3]{2} \rightsquigarrow P_1 = (0, \sqrt[3]{2}, 1/\sqrt[3]{2})$

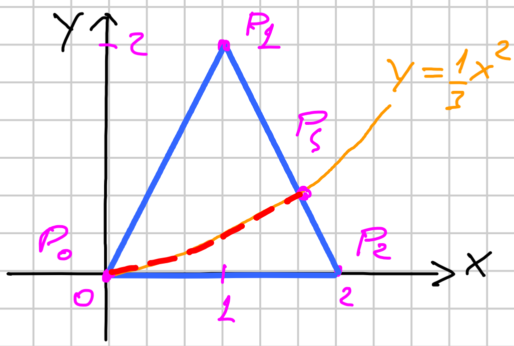
$1-2y=0$ $\begin{cases} 1 = 2(x^2+z) \\ 2z = 1 \\ x^2y + yz - 1 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} (x^2+z) = 1/2 = y \\ z = 1/2 \\ (x^2+z)y = 1 \end{cases} \rightsquigarrow y^2 = 1 \quad y = 1$

$x^2 = \frac{1}{2}$ $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \rightsquigarrow P_{2,3} = (\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{1}{2})$

$f(P_1) = 0 + \sqrt[3]{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{5}} \simeq 1,90$ $f(P_{2/3}) = \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{5} = \frac{2+5+1}{5} = \frac{7}{5} = 1,75$

$\rightsquigarrow$ MIN f = INF f = $7/5$ IN P_2 E P_3

2. Sia T il triangolo di $\mathbb{R}^2$ di vertici $(0,0)$, $(1,2)$, $(2,0)$. Calcolare estremo inferiore e superiore della funzione $f(x,y) = |3y - x^2|$ in T precisando se si tratta di minimo e/o massimo e determinando anche gli eventuali punti di minimo/massimo.



PUNTI INTERNI

CONSIDERIAMO $g(x,y) = 3y - x^2$

$\begin{cases} g_x = -2x = 0 \\ g_y = 3 = 0 \end{cases} \rightsquigarrow$ NON CI SONO PUNTI STAZIONARI INTERNI

$g(x,y) = 0 \rightsquigarrow y = \frac{x^2}{3}$ PARABOLA PER L'ORIGINE

ANNULLAMENTO DI g E f PER $P \in \overset{\frown}{P_0P_5}$

STUDIO AI BORDI

TRATTO P_0P_2 : $y = 0$ $g(x,0) = -x^2$ $g_{MIN} = -5$ IN P_2

TRATTO $P_0 P_1$: $y = 2x \quad g(x, 2x) = f(x) = 6x - x^2$

$$f'(x) = 6 - 2x = 0 \quad x = 3 \quad g_{MAX} = 5 \quad \text{IN } P_1$$

TRATTO $P_1 P_2$: $y = -2x + 5 \quad g(x, -2x+5) = f(x) = -6x + 12 - x^2$

$$f'(x) = -6 - 2x = 0 \quad x = -3 \quad g_{MAX} = 5 \text{ IN } P_1$$

$$g_{MIN} = -5 \text{ IN } P_2$$

$$f(x) = 0 \quad x = \frac{-6 \pm \sqrt{36+48}}{2} = -3 \pm \sqrt{21}$$

$$y = -2x + 5 = 5 + 6 \mp 2\sqrt{21}$$

$$\rightsquigarrow P_5 = (-3+\sqrt{21}, 10 - 2\sqrt{21})$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} \sup f = \max f = 5 \text{ IN } P_1(1,2) \\ \inf f = \min f = 0 \text{ IN } P(x,y) : y = \frac{x^2}{3} \quad 0 \le x \le -3 + \sqrt{21} \end{cases}$$

3. Sia B la sfera di R^3 di centro $(1, 2, -1)$ e raggio 2. Calcolare

$$\int_B (x + z^2 - y)\, dx\, dy\, dz.$$

$$B : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 \le 4$$

CAMBIO DI VARIABILI : $\begin{cases} x - 1 = u \\ y - 2 = v \\ z + 1 = w \end{cases} \quad \begin{cases} x = u + 1 \\ y = v + 2 \\ z = w - 1 \end{cases}$

$$B' : (u,v,w) \in \mathbb{R}^3 : u^2 + v^2 + w^2 \le 4$$

$$dx\, dy\, dz = du\, dv\, dw \quad (\text{TRASLAZIONE ASSI})$$

$$\int_B (x+z^2-y)\,dx\,dy\,dz = \int_{B'} [\mu+1+(w-1)^2-v-2]\,d\mu\,dv\,dw =$$

$$= \int_{B'} (\mu+v-2w+w^2)\,d\mu\,dv\,dw =$$

$= 0 \times$ SIMMETRIA

$$= \cancel{\int_{B'} (\mu+v-2w)\,d\mu\,dv\,dw} + \int_{B'} w^2\,d\mu\,dv\,dw =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2} \rho^2\sin^2\varphi \cdot \rho^2\cos\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta = 2\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2} \rho^5\sin^2\varphi\cos\varphi\,d\rho\,d\varphi =$$

$$= 2\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi\cos\varphi\left[\rho^5/5\right]_0^2 d\varphi = 2\pi\cdot\frac{32}{5}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi\,d(\sin\varphi) =$$

$$= \frac{64}{5}\pi\left[\sin^3\varphi/3\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{64}{15}\pi\left(1-(-1)\right) = \frac{128}{15}\pi$$

4. Sia γ la curva definita da

$$(x(t), y(t)) = (\sin^2 t, t\sin t), \qquad 0 \le t \le \pi.$$

(a) Provare che γ è chiusa e semplice e farne un disegno approssimativo.

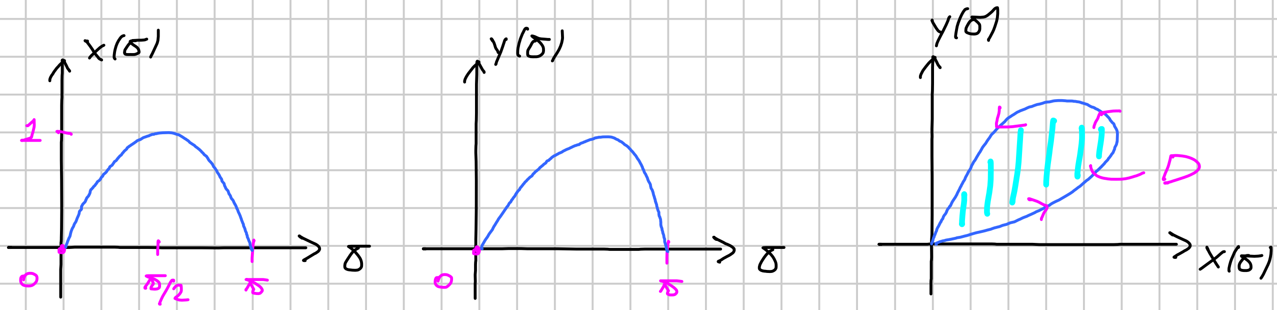
(b) Sia D il dominio racchiuso da γ. Calcolare $\int_D x\,dx\,dy$.

(a) $\gamma(0) = (0,0) = \gamma(\pi) \rightsquigarrow$ γ È CHIUSA

SIANO $s \neq t$ $\quad \gamma(s) = \gamma(t) \rightsquigarrow \begin{cases} \sin^2 t = \sin^2 s \rightsquigarrow s = \pi - t \\ t\sin t = s\sin s \end{cases}$

$t\sin t = (\pi - t)\sin(\pi - t) = (\pi - t)\sin t \qquad (2t-\pi)\sin t = 0$

$\begin{cases} \sin t = 0 \rightsquigarrow t = \pi/2 \quad s = \pi/2 \\ 2t - \pi = 0 \rightsquigarrow t = \pi/2 \quad s = \pi/2 \end{cases} \rightsquigarrow$ γ È SEMPLICE



(b) $\displaystyle\int_D x\,dx\,dy \qquad\qquad \int_\Omega \operatorname{div}\vec{E}\,dx\,dy = \int_{\partial\Omega} \vec{E}\cdot\vec{n}\,dS$

SIA $\vec{E} = (\overset{A}{0}, \overset{B}{xy}) \rightsquigarrow \operatorname{div}\vec{E} = x$

$$\int_D x\,dx\,dy = \int_{\partial D} A\,dy - B\,dx = -\int_{\partial D} xy\,dx =$$

$$= -\int_0^\pi \operatorname{sen}^2\sigma \cdot \sigma\operatorname{sen}\sigma \cdot (2\operatorname{sen}\sigma\cos\sigma)\,d\sigma = -\int_0^\pi \underbrace{2\sigma}_{f}\,\overbrace{\operatorname{sen}^4\sigma\cos\sigma}^{f'}\,d\sigma =$$

$$\int \operatorname{sen}^4\sigma\cos\sigma\,d\sigma = \int \operatorname{sen}^4\sigma\,d(\operatorname{sen}\sigma) = \frac{1}{5}\operatorname{sen}^5\sigma$$

$$= -\left[2\sigma\cdot\left(\frac{1}{5}\operatorname{sen}^5\sigma\right)\right]_0^\pi + \int_0^\pi 2\left(\frac{1}{5}\operatorname{sen}^5\sigma\right)d\sigma =$$

$$= 0 + \frac{2}{5}\int_0^\pi \operatorname{sen}^5\sigma\,d\sigma = \frac{2}{5}\int_0^\pi \operatorname{sen}^4\sigma\,d(-\cos\sigma) =$$

$$= -\frac{2}{5}\int_0^\pi (1-\cos^2\sigma)^2\,d(\cos\sigma) = -\frac{2}{5}\int_0^\pi (1-2\cos^2\sigma+\cos^4\sigma)\,d(\cos\sigma) =$$

$$= -\frac{2}{5}\left[\cos\sigma - \frac{2}{3}\cos^3\sigma + \frac{1}{5}\cos^5\sigma\right]_0^\pi = -\frac{2}{5}\left(-1+\frac{2}{3}-\frac{1}{5}-1+\frac{2}{3}-\frac{1}{5}\right) =$$

$$= -\frac{2}{5}\left(-2+\frac{4}{3}-\frac{2}{5}\right) = -\frac{2}{5}\,\frac{-30+20-6}{15} = \frac{32}{75}$$