Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica/Telecomunicazioni

Scritto d'esame di Algebra Lineare

Pisa, 15 Febbraio 2014

1. Consideriamo i seguenti 3 punti nello spazio:

$$A = (1, 0, 1), \qquad B = (0, 2, 0), \qquad C = (-1, 2, -3).$$

   (a) Determinare la lunghezza ed il piede dell'altezza del triangolo ABC uscente dal vertice A.

   (b) Determinare l'area del triangolo ABC.

   (c) Sia r la retta passante per C e parallela alla retta AB. Determinare il punto di intersezione e l'angolo formato tra r ed il piano $x - y = 0$.

2. Consideriamo, al variare dei parametri reali a e b, il sistema lineare

$$\begin{aligned} x + ay + z &= 0 \\ 2x - y + bz &= 2 \\ 3x + 2z &= 5 \end{aligned}$$

   Determinare per quali valori dei parametri il sistema ammette soluzione non unica, ed in tali casi determinare esplicitamente l'insieme delle soluzioni.

3. Consideriamo la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ a & 7 \end{pmatrix}$, dove a è un parametro reale.

   (a) Determinare per quali valori di a la matrice A ammette l'autovalore $\lambda = 5$. Per tali valori di A, determinare una matrice invertibile M tale che $M^{-1}AM$ sia diagonale.

   (b) Determinare per quali valori di a esiste una matrice *ortogonale* M tale che $M^{-1}AM$ sia diagonale, ed in tal caso determinare tale matrice diagonale.

4. Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ il sottospazio W di equazione cartesiana $x + y - 2z = 0$ ed il prodotto scalare rappresentato, rispetto alla base canonica, dalla matrice

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

   (a) Dimostrare che il prodotto scalare è definito positivo.

   (b) Determinare una base ortogonale di W (rispetto al prodotto scalare rappresentato da B) costituita da vettori a coordinate intere.

   (c) Determinare $W^{\perp}$ (sempre rispetto al prodotto scalare di matrice B).

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.

SOLUZIONI
BY GIMUSI 16/02/15

1. Consideriamo i seguenti 3 punti nello spazio:

$$A = (1, 0, 1), \qquad B = (0, 2, 0), \qquad C = (-1, 2, -3).$$

(a) Determinare la lunghezza ed il piede dell'altezza del triangolo ABC uscente dal vertice A.

(b) Determinare l'area del triangolo ABC.

(c) Sia r la retta passante per C e parallela alla retta AB. Determinare il punto di intersezione e l'angolo formato tra r ed il piano $x - y = 0$.

(a) $BC = C - B = (-1, 0, -3)$ RETTA r_{BC}: $(0,2,0) + \delta(-1,0,-3)$

PIANO $\pi_A \perp BC$: $x + 3z + d = 0$ $A \in \pi_A$ $5 + d = 0$ $d = -5$

$\rightsquigarrow x + 3z - 5 = 0$

INTERSEZIONE $r_{BC} \cap \pi_A$: $-\delta - 9\delta - 5 = 0$ $\delta = -2/5$

PIEDE ALTEZZA: $H = (0,2,0) + (2/5, 0, 6/5) = (2/5, 2, 6/5)$

ALTEZZA $AH = H - A = (2/5 - 1, 2, 6/5 - 1) = (-3/5, 2, 1/5)$

$$\|AH\| = \left(\frac{9}{25} + 4 + \frac{1}{25}\right)^{1/2} = \left(\frac{9 + 100 + 1}{25}\right)^{1/2} = \frac{1}{5}\sqrt{110}$$

(b) $\|BC\| = (1 + 9)^{1/2} = \sqrt{10}$

AREA: $\frac{1}{2}\|BC\| \cdot \|AH\| = \frac{1}{2}\sqrt{10} \cdot \frac{1}{5}\sqrt{110} = \sqrt{11}$

VERIFICA: $BA = A - B = (1, -2, 1)$

$$m = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (-6, 2, 2) \qquad \|m\| = (36 + 4 + 4)^{1/2} = 2\sqrt{11} \rightsquigarrow \text{AREA} = \sqrt{11}$$

(c) $AB = (B - A) = (-1, 2, -1)$ RETTA $r \parallel AB$: $(-1, 2, -3) + \delta(-1, 2, -1)$

$\pi: x - y = 0$ $r \cap \pi$: $-1 - \delta - 2 - 2\delta = 0$ $3\delta = -3$ $\delta = -1$

$\rightsquigarrow$ INTERS. $P = (-1 + 1, 2 - 2, -3 + 1) = (0, 0, -2)$

ANGOLO(m, v): $\cos\theta = \frac{2 + 2 + 0}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{6}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightsquigarrow \theta = 30^\circ$

$\rightsquigarrow \measuredangle(r, \pi) = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$

2. Consideriamo, al variare dei parametri reali a e b, il sistema lineare

$$\begin{aligned} x + ay + z &= 0 \\ 2x - y + bz &= 2 \\ 3x + 2z &= 5 \end{aligned}$$

Determinare per quali valori dei parametri il sistema ammette soluzione non unica, ed in tali casi determinare esplicitamente l'insieme delle soluzioni.

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 2 & -1 & b \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 0 \\ 2 & -1 & b & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 5 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & -1-2a & b-2 & 2 \\ 0 & -3a & -1 & 5 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1+2a & 2-b & -2 \\ 0 & 3a & 1 & -5 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1+2a & 2-b & -2 \\ 0 & 0 & (1+2a)-3a(2-b) & -5(1+2a)+6a \end{array}\right)$$

SOLUZ. NON UNICA $\begin{cases} -5-10a+6a=0 \rightsquigarrow a = -5/4 \\ 1 - \frac{5}{2} + \frac{15}{\cancel{4}\,2} \cdot \cancel{2} - \frac{15}{4} b = 0 \rightsquigarrow b = \frac{24}{15} = \frac{8}{5} \end{cases}$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5/4 & 1 & 0 \\ 0 & 1-5/2 & 2-8/5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -5 & 4 & 0 \\ 0 & -3/2 & 2/5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -5 & 4 & 0 \\ 0 & -15 & 4 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} 4x = -4\delta + \frac{20}{3} + \frac{4}{3}\delta = \frac{20}{3} - \frac{8}{3}\delta \\ -15y = -20 - 4\delta \qquad y = \frac{4}{3} + \frac{4}{15}\delta \\ z = \delta \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} x = 5/3 - 2/3\,\delta \\ y = 4/3 + 4/15\,\delta \\ z = \delta \end{cases}$$

3. Consideriamo la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ a & 7 \end{pmatrix}$, dove a è un parametro reale.

(a) Determinare per quali valori di a la matrice A ammette l'autovalore $\lambda = 5$. Per tali valori di A, determinare una matrice invertibile M tale che $M^{-1}AM$ sia diagonale.

(b) Determinare per quali valori di a esiste una matrice *ortogonale* M tale che $M^{-1}AM$ sia diagonale, ed in tal caso determinare tale matrice diagonale.

(a) $TR(A) = 8 \quad DET(A) = 7 + 3a$

$\lambda_1 = 5 \rightsquigarrow \lambda_2 = TR(A) - 5 = 3 \rightsquigarrow DET(A) = 15 \rightsquigarrow a = 8/3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 8/3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 5 \rightsquigarrow (A - \lambda I) = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 8/3 & 2 \end{pmatrix} X = 0 \rightsquigarrow X_1 = (3, -4) \\ \lambda_2 = 3 \rightsquigarrow (A - \lambda I) = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 8/3 & 4 \end{pmatrix} X = 0 \rightsquigarrow X_2 = (3, -2) \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow M = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \qquad M^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

(b) PER TEOREMA SPETTRALE $a = -3 \qquad A = A^T$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} \qquad TR = 8 \quad DET = -2$$

$$\rightsquigarrow \lambda^2 - 8\lambda - 2 = 0 \qquad \lambda = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 8}}{2} = \frac{8 \pm 6\sqrt{2}}{2}$$

$$\lambda_1 = 4 + 3\sqrt{2} \qquad \lambda_2 = 4 - 3\sqrt{2}$$

$$\rightsquigarrow D = \begin{pmatrix} 4 + 3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 4 - 3\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

4. Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ il sottospazio W di equazione cartesiana $x + y - 2z = 0$ ed il prodotto scalare rappresentato, rispetto alla base canonica, dalla matrice

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Dimostrare che il prodotto scalare è definito positivo.

(b) Determinare una base ortogonale di W (rispetto al prodotto scalare rappresentato da B) costituita da vettori a coordinate intere.

(c) Determinare $W^\perp$ (sempre rispetto al prodotto scalare di matrice B).

(a)

$$\mathrm{DET}(B) = 27 - 1 - 1 - 3 - 3 - 3 = 16 > 0$$

SYLVESTER(1,2,3): $\mathrm{DET}(3) > 0 \quad \mathrm{DET}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = 8 > 0 \quad \mathrm{DET}(B) > 0$

$\rightsquigarrow \; + \overset{P}{+} \overset{P}{+} \overset{P}{+} \quad (n_+ = 3, n_- = 0, n_0 = 0) \Rightarrow$ DEF. POSITIVO

(b) BASE DI W: $v_1 = (1,-1,0) \qquad v_2 = (2,0,1)$

$$\langle v_1, v_1 \rangle = v_1^T B v_1 = (5,-5,0)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 8$$

$$\langle v_1, v_2 \rangle = v_1^T B v_2 = (5,-5,0)\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 8$$

$$\begin{cases} w_1 = v_1 \\ w_2 = v_2 - \dfrac{\langle v_1, v_2 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 = (2,0,1) - \dfrac{8}{8}(1,-1,0) = (1,1,1) \end{cases}$$

$$\langle w_2, w_2 \rangle = w_2^T B w_2 = (1,1,1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3$$

$$w_1^* = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{-1}{2\sqrt{2}}, 0 \right) \qquad w_2^* = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

(c) $v = (a, b, c)$

$$\begin{cases} v_1^{\sigma} B v = (5, -5, 0) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \\ v_2^{\sigma} B v = (3, -3, 1) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5a - 5b = 0 \\ 3a - 3b + c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = b \\ 2b = -c \end{cases} \rightsquigarrow \quad W^{\perp} = \sigma(1, 1, -2)$$