Isometrie dello spazio 2

Argomenti: isometrie dello spazio **Difficoltà:** ⋆⋆⋆⋆⋆

Prerequisiti: isometrie nello, matrici ortogonali

1. Scrivere l'espressione generale e determinare i punti fissi per ciascuna delle seguenti isometrie dello spazio:
   (a) rotazione intorno all'asse y di 90° in un verso giudicato antiorario da un omino orientato secondo il semiasse positivo delle y, seguita da rotazione intorno all'asse z di 90° in un verso giudicato orario da un omino orientato secondo il semiasse positivo delle z,
   (b) rotazione intorno all'asse z di 90° in un verso giudicato orario da un omino orientato secondo il semiasse positivo delle z, seguita da rotazione intorno all'asse y di 90° in un verso giudicato antiorario da un omino orientato secondo il semiasse positivo delle y,
   (c) rotazione intorno alla retta passante per l'origine e per $(1, 1, 1)$ di 90° in un verso giudicato orario da un omino orientato secondo il semiasse positivo delle z,
   (d) la rotazione del punto precedente, seguita da simmetria centrale rispetto al punto $(1, 0, -2)$,
   (e) rotazione intorno alla retta passante per $(2, -1, 5)$ e per $(3, 0, 4)$ di 90° in un verso giudicato orario da un omino orientato secondo il semiasse positivo delle z,
   (f) rotazione intorno alla retta passante per $(2, -1, 5)$ e per $(3, 0, 4)$ di 90° in un verso giudicato orario da un omino orientato secondo il semiasse positivo delle z, seguita da simmetria rispetto al piano di equazione $2x - y + 5z = 3$.

2. Verificare che le seguenti espressioni rappresentano delle isometrie dello spazio e descrivere di cosa si tratta sulla base della classificazione, precisando anche gli elementi geometrici (cioè se si tratta di una simmetria occorre dire rispetto a quale piano, se si tratta di una rotazione occorre dire di quale angolo e rispetto a quale asse, e così via).

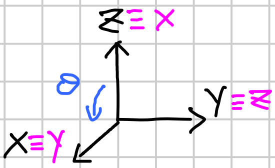
(x, y, z)	(y, z, x)	(y, x, z)
$(x, -y, z)$	$(y, -z, x)$	$(y, -x, z)$
$(3 + x, 5 + y, 7 + z)$	$(3 - x, 5 + y, 7 + z)$	$(3 + x, 5 - y, 7 - z)$
$(3 - x, 5 - y, 7 - z)$	$(3 + x, 5 + z, 7 + y)$	$(3 - x, 5 + z, 7 + y)$
$(3 + x, 5 + z, 7 - y)$	$(3 - x, 5 - z, 7 + y)$	$(3 + x, 5 - z, 7 - y)$
$(3 - x, 5 - z, 7 - y)$	$(3 + y, 5 + z, 7 + x)$	$(3 + y, 5 - z, 7 + x)$
$(3 - y, 5 + z, 7 - x)$	$(3 - y, 5 - z, 7 - x)$	$(3 + z, 5 + x, 7 + y)$

3. Consideriamo i 3 punti $A = (1, 2, 4)$, $B = (1, 3, 6)$, $C = (-1, 3, 4)$. Determinare le espressioni di tutte le isometrie dello spazio che mandano il triangolo ABC in se stesso (ma non è detto che mandino A in A, B in B e C in C).

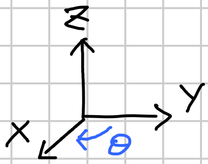
SOLUZIONI ?
BY GIMUSI 16/02/15

1. Scrivere l'espressione generale e determinare i punti fissi per ciascuna delle seguenti isometrie dello spazio:

   (a) rotazione intorno all'asse y di 90° in un verso giudicato antiorario da un omino orientato secondo il semiasse positivo delle y, seguita da rotazione intorno all'asse z di 90° in un verso giudicato orario da un omino orientato secondo il semiasse positivo delle z,

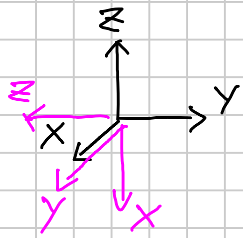
ROT. Y: 

$$P' = S'P \qquad S' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \overset{M}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \overset{\hat{S}}{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \overset{M^{-1}}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

ROT. Z: 

$$P'' = S''P' \qquad S'' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

COMPOSIZIONE: $P'' = SP \qquad S = S''S' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

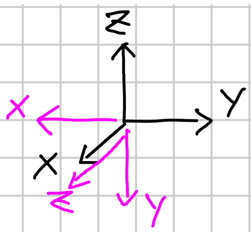


PUNTI FISSI: $P'' = SP = P \rightsquigarrow (S - I)P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} P = 0 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P = 0$

$P = \sigma(1, 1, -1)$ ≡ RETTA FISSA

   (b) rotazione intorno all'asse z di 90° in un verso giudicato orario da un omino orientato secondo il semiasse positivo delle z, seguita da rotazione intorno all'asse y di 90° in un verso giudicato antiorario da un omino orientato secondo il semiasse positivo delle y,

$$\begin{cases} P' = S''P \\ P'' = S'P' \end{cases} \rightsquigarrow P'' = SP \qquad S = S'S'' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$



PUNTI FISSI: $P'' = SP = P \rightsquigarrow (S - I)P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} P = 0 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P = 0$

$P = \sigma(1, -1, 1)$ ≡ RETTA FISSA

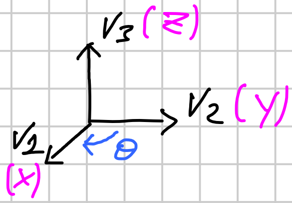
(c) rotazione intorno alla retta passante per l'origine e per $(1,1,1)$ di $90°$ in un verso giudicato orario da un omino orientato secondo il semiasse positivo delle z,

BASE ORTOG.: $\begin{cases} \hat{V}_3 = (1,1,1) \ \text{// RETTA} \\ \hat{V}_1, \hat{V}_2 \perp \hat{V}_3 : \ \hat{V}_1 = (2,-1,-1) \quad \hat{V}_2 = (0,1,-1) \end{cases}$

BASE ORTON.: $V_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}\right) \quad V_2 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right) \quad V_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

IN BASE $\{V_1, V_2, V_3\}$

ROTAZ. ORARIA INTORNO A V_3: $\hat{S} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$



$$\text{IN BASE CANONICA: } S = \underbrace{\begin{pmatrix} 2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}}_{M} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\hat{S}} \underbrace{\begin{pmatrix} 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}}_{M^{-1} = M^T} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \rightsquigarrow S = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/\sqrt{3} + 1/3 & -1/\sqrt{3} + 1/3 \\ -1/\sqrt{3} + 1/3 & 1/3 & 1/\sqrt{3} + 1/3 \\ 1/\sqrt{3} + 1/3 & -1/\sqrt{3} + 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\text{PUNTI FISSI: } P' = SP = P \rightsquigarrow (S - I)P = \begin{pmatrix} -2/3 & 1/\sqrt{3} + 1/3 & -1/\sqrt{3} + 1/3 \\ -1/\sqrt{3} + 1/3 & -2/3 & 1/\sqrt{3} + 1/3 \\ 1/\sqrt{3} + 1/3 & -1/\sqrt{3} + 1/3 & -2/3 \end{pmatrix} P = 0$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -2/3 & 1/\sqrt{3} + 1/3 & -1/\sqrt{3} + 1/3 \\ -1/\sqrt{3} + 1/3 & -2/3 & 1/\sqrt{3} + 1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P = 0 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -2/3 & 1/\sqrt{3} + 1/3 & -1/\sqrt{3} + 1/3 \\ -2/3 & -2/3(1/\sqrt{3} + 1/3) & 2/3\sqrt{3} + 5/9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P = 0$$

$$\begin{pmatrix} -2/3 & 1/\sqrt{3} + 1/3 & -1/\sqrt{3} + 1/3 \\ 0 & 3/\sqrt{3} + 2 & -3\sqrt{3} - 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P = 0 \rightsquigarrow P = \sigma(1,1,1)$$

(d) la rotazione del punto precedente, seguita da simmetria centrale rispetto al punto $(1, 0, -2)$,

$$\begin{cases} P' = SP & S = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/\sqrt{3}+1/3 & -1/\sqrt{3}+1/3 \\ -1/\sqrt{3}+1/3 & 1/3 & 1/\sqrt{3}+1/3 \\ 1/\sqrt{3}+1/3 & -1/\sqrt{3}+1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \\ P'' = 2P_0 - P' & P_0 = (1, 0, -2) \end{cases}$$

COMPOSIZIONE: $P'' = 2P_0 - SP$

PUNTI FISSI: $P'' = 2P_0 - SP = P \rightsquigarrow (S+I)P = 2P_0 \rightsquigarrow$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5/3 & 1/\sqrt{3}+1/3 & -1/\sqrt{3}+1/3 & 2 \\ -1/\sqrt{3}+1/3 & 5/3 & 1/\sqrt{3}+1/3 & 0 \\ 1/\sqrt{3}+1/3 & -1/\sqrt{3}+1/3 & 5/3 & -5 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5/3 & 1/\sqrt{3}+1/3 & -1/\sqrt{3}+1/3 & 2 \\ -2/9 & 5/3\sqrt{3}+5/9 & 2/3\sqrt{3}+5/9 & 0 \\ -2/9 & -2/3\sqrt{3}+5/9 & -5/3\sqrt{3}+5/9 & 5/\sqrt{3}-5/3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5/3 & 1/\sqrt{3}+1/3 & -1/\sqrt{3}+1/3 & 2 \\ 0 & 9/\sqrt{3}+3 & 3/\sqrt{3}+3 & 2 \\ 0 & -6/3\sqrt{3} & -6/3\sqrt{3} & 5/\sqrt{3}-5/3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5/3 & 1/\sqrt{3}+1/3 & -1/\sqrt{3}+1/3 & 2 \\ 0 & 1 & \sqrt{3}/3 & \frac{\sqrt{3}-1}{3} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{2\sqrt{3}-6}{3} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5/3 & 1/\sqrt{3}+1/3 & -1/\sqrt{3}+1/3 & 2 \\ 0 & 1 & \sqrt{3}/3 & \frac{\sqrt{3}-1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{3-\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}-5}{3} \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{cases} z = \dfrac{\sqrt{3}-5}{3-\sqrt{3}} = \dfrac{3\sqrt{3}-15+3-5\sqrt{3}}{6} = \\ = -2-\sqrt{3}/3 \end{cases}$$

$$y = \frac{\sqrt{3}-1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}\left(-2-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$$

$$\begin{cases} \frac{5}{3}x = 2 - \sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\right)\left(+2+\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 2 - 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{9} = \\ = \frac{5}{3} - \frac{2}{9}\sqrt{3} - \frac{2}{3}\sqrt{3} = \frac{5}{3} - \frac{8}{9}\sqrt{3} \qquad x = 1 - \frac{2}{3}\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow P = \left(1 - \frac{2}{3}\sqrt{3},\ \sqrt{3},\ -2-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

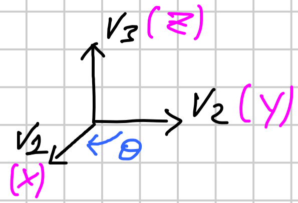
(e) rotazione intorno alla retta passante per $(2,-1,5)$ e per $(3,0,4)$ di $90°$ in un verso giudicato orario da un omino orientato secondo il semiasse positivo delle z,

BASE ORTOG.: $\begin{cases} \hat v_3 = (-1,-1,1) & // \text{ RETTA: } (3,0,5)+\delta(-1,-1,1) \\ \hat v_1, \hat v_2 \perp \hat v_3 : & \hat v_1 = (2,-1,1) \quad \hat v_2 = (0,1,1) \end{cases}$

BASE ORTON.: $v_1 = \left(\frac{2}{\sqrt6}, \frac{-1}{\sqrt6}, \frac{1}{\sqrt6}\right) \quad v_2 = \left(0, \frac{1}{\sqrt2}, \frac{1}{\sqrt2}\right) \quad v_3 = \left(\frac{-1}{\sqrt3}, \frac{-1}{\sqrt3}, \frac{1}{\sqrt3}\right)$

IN BASE $\{v_1, v_2, v_3\}$

ROTAZ. ORARIA INTORNO A v_3: $\hat S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$



IN BASE CANONICA: $S = \underbrace{\begin{pmatrix} 2/\sqrt6 & 0 & -1/\sqrt3 \\ -1/\sqrt6 & 1/\sqrt2 & -1/\sqrt3 \\ 1/\sqrt6 & 1/\sqrt2 & 1/\sqrt3 \end{pmatrix}}_{M} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\hat S} \underbrace{\begin{pmatrix} 2/\sqrt6 & -1/\sqrt6 & 1/\sqrt6 \\ 0 & 1/\sqrt2 & 1/\sqrt2 \\ -1/\sqrt3 & -1/\sqrt3 & 1/\sqrt3 \end{pmatrix}}_{M^{-1}=M^T} =$

$$= \begin{pmatrix} 2/\sqrt6 & 0 & -1/\sqrt3 \\ -1/\sqrt6 & 1/\sqrt2 & -1/\sqrt3 \\ 1/\sqrt6 & 1/\sqrt2 & 1/\sqrt3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt2 & 1/\sqrt2 \\ -2/\sqrt6 & 1/\sqrt6 & -1/\sqrt6 \\ -1/\sqrt3 & -1/\sqrt3 & 1/\sqrt3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow S = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/\sqrt3 + 1/3 & 1/\sqrt3 - 1/3 \\ -1/\sqrt3 + 1/3 & 1/3 & -1/\sqrt3 - 1/3 \\ -1/\sqrt3 - 1/3 & 1/\sqrt3 - 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow P' = S(P-A) + A \qquad A = (3,0,5) \in r$

PUNTI FISSI: $P' = S(P-A) + A = P \rightsquigarrow \underbrace{\begin{pmatrix} -2/3 & 1/\sqrt3 + 1/3 & 1/\sqrt3 - 1/3 \\ -1/\sqrt3 + 1/3 & -2/3 & -1/\sqrt3 - 1/3 \\ -1/\sqrt3 - 1/3 & 1/\sqrt3 - 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}}_{(S-I)} (P-A) = 0$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -2/3 & 1/\sqrt3 + 1/3 & 1/\sqrt3 - 1/3 \\ -1/\sqrt3 + 1/3 & -2/3 & -1/\sqrt3 - 1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (P-A) = 0 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -2/3 & 1/\sqrt3 + 1/3 & 1/\sqrt3 - 1/3 \\ 2/9 & 2/3\sqrt3 + 2/9 & 2/3\sqrt3 + 5/9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (P-A) = 0$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -2/3 & 1/\sqrt3 + 1/3 & 1/\sqrt3 - 1/3 \\ 0 & 3/\sqrt3 + 1 & 3/\sqrt3 + 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (P-A) = 0 \rightsquigarrow P = A + \delta(-1,-1,1)$$

(f) rotazione intorno alla retta passante per $(2,-1,5)$ e per $(3,0,4)$ di $90°$ in un verso giudicato orario da un omino orientato secondo il semiasse positivo delle z, seguita da simmetria rispetto al piano di equazione $2x-y+5z=3$.

ROTAZ INTORNO A RETTA r: $(3,0,5)+\sigma(-1,-1,1)$

$$P' = S'(P-A)+A \quad A\in r \qquad S' = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/\sqrt{3}+1/3 & 1/\sqrt{3}-1/3 \\ -1/\sqrt{3}+1/3 & 1/3 & -1/\sqrt{3}-1/3 \\ -1/\sqrt{3}-1/3 & 1/\sqrt{3}-1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

SIMM. PIANO π: $2x-y+5z=3$

$v_1, v_2 \parallel \pi$: $v_1=(1,2,0)$ $v_2=(5,0,-2)$ $v_3 \perp \pi$: $v_3=(2,-1,5)$

NELLA BASE $\{v_1,v_2,v_3\}$: $\hat{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

MATRICE CAMBIO BASE: $M = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ $\quad DET(M) = 1\cdot(-2)-2(29) = -60$

$$M^{-1} = -\frac{1}{60}\begin{pmatrix} -2 & -10 & -5 \\ -29 & 5 & +2 \\ -5 & +5 & -10 \end{pmatrix}^{T} = \frac{1}{60}\begin{pmatrix} 2 & 29 & 5 \\ 10 & -5 & -5 \\ 5 & -2 & 10 \end{pmatrix}$$

IN BASE CANONICA: $S'' = M\hat{S}M^{-1} = \frac{1}{60} M \begin{pmatrix} 2 & 29 & 5 \\ 10 & -5 & -5 \\ -5 & 2 & -10 \end{pmatrix} =$

$$= \frac{1}{60}\begin{pmatrix} 55 & 8 & -50 \\ 8 & 56 & 20 \\ -50 & 20 & -50 \end{pmatrix} \rightsquigarrow S'' = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 11 & 2 & -10 \\ 2 & 15 & 5 \\ -10 & 5 & -10 \end{pmatrix}$$

$$P'' = S''(P'-B)+B$$

$r\cap\pi$: $2(3-\sigma)-(-\sigma)+5(5+\sigma)=3 \qquad 6-2\sigma+\sigma+20+5\sigma=3$

$5\sigma=-23 \quad \sigma=-23/5 \rightsquigarrow \left(3+\frac{23}{5}, \frac{23}{5}, 5-\frac{23}{5}\right) = \left(\frac{35}{5}, \frac{23}{5}, -\frac{7}{5}\right)$

SI ASSUME $A=B=\left(\frac{35}{5}, \frac{23}{5}, -\frac{7}{5}\right)$

COMPOSIZIONE:

$$P'' = S''[S'(P-A)+A-A]+A = S''S'(P-A)+A \qquad P'' = S(P-A)+A$$

$$S = S''S' = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 11 & 2 & -10 \\ 2 & 14 & 5 \\ -10 & 5 & -10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/3 & 1/\sqrt{3}+1/3 & 1/\sqrt{3}-1/3 \\ -1/\sqrt{3}+1/3 & 1/3 & -1/\sqrt{3}-1/3 \\ -1/\sqrt{3}-1/3 & 1/\sqrt{3}-1/3 & 1/3 \end{pmatrix} =$$

$$\rightsquigarrow S = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 23/3+8/\sqrt{3} & 23/3+1/\sqrt{3} & -23/3+9/\sqrt{3} \\ 11/3-13/\sqrt{3} & 11/3+7/\sqrt{3} & -11/3-12/\sqrt{3} \\ 5/3+5/\sqrt{3} & 5/3-20/\sqrt{3} & -5/3-15/\sqrt{3} \end{pmatrix} \qquad A = \left(\frac{33}{5}, \frac{23}{5}, \frac{-7}{5}\right)$$

PUNTI FISSI: $P'' = S(P-A)+A = P \qquad (S-I)(P-A)=0$

$$(S-I) = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} -22/3+8/\sqrt{3} & 23/3+1/\sqrt{3} & -23/3+9/\sqrt{3} \\ 11/3-13/\sqrt{3} & -34/3+7/\sqrt{3} & -11/3-12/\sqrt{3} \\ 5/3+5/\sqrt{3} & 5/3-20/\sqrt{3} & -50/3-15/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \times 2 \\ \times 6 \end{matrix} \quad = \quad 12$$

$$\rightsquigarrow \frac{1}{15}\begin{pmatrix} -22/3+8/\sqrt{3} & 23/3+1/\sqrt{3} & -23/3+9/\sqrt{3} \\ -30/\sqrt{3} & -13+15/\sqrt{3} & -15-15/\sqrt{3} \\ 10 & -5-105/\sqrt{3} & -115-105/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \times \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \\ \end{matrix} \quad = \quad 12/\sqrt{3}$$

$$\rightsquigarrow \frac{1}{15}\begin{pmatrix} -22/3+8/\sqrt{3} & 23/3+1/\sqrt{3} & -23/3+9/\sqrt{3} \\ -10 & 5-15/\sqrt{3} & -3-15/\sqrt{3} \\ 10 & -5-105/\sqrt{3} & -115-105/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \frac{1}{15}\begin{pmatrix} -22/3+8/\sqrt{3} & 23/3+1/\sqrt{3} & -23/3+9/\sqrt{3} \\ -10 & 5-15/\sqrt{3} & -3-15/\sqrt{3} \\ 0 & -120/\sqrt{3} & -120-120/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{matrix} \times 3\sqrt{3} \\ \times \sqrt{3}/5 \\ \times \sqrt{3}/120 \end{matrix} \quad = \frac{\cancel{12}}{\cancel{\sqrt{3}}} \cdot \frac{3\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{600}\ 50} = \frac{3}{50}$$

$$\rightsquigarrow \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 25-22\sqrt{3} & 3+23\sqrt{3} & 27-23\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & -3+\sqrt{3} & -3-\sqrt{3} \\ 0 & -1 & -1-\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{9\cdot 15^3}{50}\right)\cdot DET(S-I) = (24-22\sqrt{3})\left[(-3+\sqrt{3})(-2-\sqrt{3})-(3+\sqrt{3})\right] +$$

$$+2\sqrt{3}\left[(3+23\sqrt{3})(-1-\sqrt{3})+(27-23\sqrt{3})\right] =$$

$$= (24-22\sqrt{3})(\cancel{3}+3\sqrt{3}-\sqrt{3}-\cancel{3}-3-\sqrt{3})+2\sqrt{3}(-3-3\sqrt{3}-23\sqrt{3}-69+27-23\sqrt{3})=$$

$$= (24-22\sqrt{3})(-3+\sqrt{3})+2\sqrt{3}(-45-49\sqrt{3}) = -72+\cancel{24\sqrt{3}}+\cancel{66\sqrt{3}}-66-\cancel{90\sqrt{3}}-294=$$

$$= -432 \quad \rightsquigarrow DET(S-I) = \frac{-432\cdot 50}{9\cdot 15^3} = \frac{-32}{45} \neq 0$$

$$\rightsquigarrow (P-A)=0 \quad \rightsquigarrow \quad P=A \equiv 1 \text{ P.TO FISSO}$$

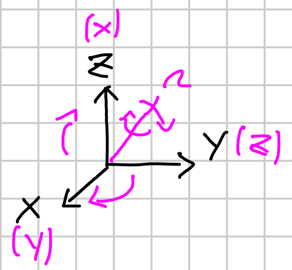
2. Verificare che le seguenti espressioni rappresentano delle isometrie dello spazio e descrivere di cosa si tratta sulla base della classificazione, precisando anche gli elementi geometrici (cioè se si tratta di una simmetria occorre dire rispetto a quale piano, se si tratta di una rotazione occorre dire di quale angolo e rispetto a quale asse, e così via).

(a) (x, y, z)	(b) (y, z, x)	(c) (y, x, z)
(d) $(x, -y, z)$	(e) $(y, -z, x)$	(f) $(y, -x, z)$
(g) $(3+x, 5+y, 7+z)$	(h) $(3-x, 5+y, 7+z)$	(i) $(3+x, 5-y, 7-z)$
(l) $(3-x, 5-y, 7-z)$	(m) $(3+x, 5+z, 7+y)$	(n) $(3-x, 5+z, 7+y)$
(o) $(3+x, 5+z, 7-y)$	(p) $(3-x, 5-z, 7+y)$	(q) $(3+x, 5-z, 7-y)$
(r) $(3-x, 5-z, 7-y)$	(s) $(3+y, 5+z, 7+x)$	(t) $(3+y, 5-z, 7+x)$
(u) $(3-y, 5+z, 7-x)$	(v) $(3-y, 5-z, 7-x)$	(z) $(3+z, 5+x, 7+y)$

(a) $(x,y,z) \rightsquigarrow f(x)=Ax+b \quad A=I \quad b=0 \rightsquigarrow$ ISOMETRIA $\equiv \mathbb{R}^3$ FISSO

(b) $(y,z,x) \rightsquigarrow f(x)=Ax+b \quad A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad b=0 \quad AA^{T}=I \rightsquigarrow$ ISOMETRIA

PUNTI FISSI: $Ax=x \rightsquigarrow (A-I)x = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} x = 0 \rightsquigarrow x = t(1,1,1)$



$\rightsquigarrow$ ROTAZ. RISPETTO A RETTA r: $t(1,1,1)$

DI ANGOLO 120° IN SENSO ORARIO PER

OMINO ORIENTATO COME z^+

INFATTI SIA $\varpi \perp r$: $x+y+z=0$

$$\begin{cases} P \in \varpi \quad P=(1,-1,0) \rightsquigarrow P'=AP=(-1,0,1) \in \varpi \\ \text{ANGOLO}(OP, OP') : \cos\theta = \dfrac{-1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \dfrac{-1}{2} \rightsquigarrow \theta = \pm 120° \end{cases}$$

(c) $(y,x,z) \rightsquigarrow f(x)=Ax+b \quad A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b=0 \quad AA^{\delta}=I \rightsquigarrow$ ISOMETRIA

PUNTI FISSI: $Ax=x \rightsquigarrow (A-I)x=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x=0 \rightsquigarrow x_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad x_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$m=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=(-1,1,0) \rightsquigarrow$$ SIMMETRIA RISPETTO AL PIANO $x-y=0$

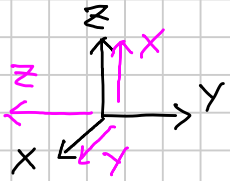
(d) $(x,-y,z) \rightsquigarrow f(x)=Ax+b \quad A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b=0 \quad AA^{\delta}=I \rightsquigarrow$ ISOMETRIA

PUNTI FISSI: $Ax=x \rightsquigarrow (A-I)x=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x=0 \rightsquigarrow x_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$m=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=(0,1,0) \rightsquigarrow$$ SIMMETRIA RISPETTO AL PIANO $y=0$ (xz)

(e) $(y,-z,x) \rightsquigarrow f(x)=Ax+b \quad A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad b=0 \quad AA^{\delta}=I \rightsquigarrow$ ISOMETRIA

PUNTI FISSI: $Ax=x \rightsquigarrow (A-I)x=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} x=0 \rightsquigarrow \quad x=0$



⤳ ROTAZ. RISPETTO A RETTA r: $\delta(1,1,1)$
DI ANGOLO 120° IN SENSO ORARIO PER
OMINO ORIENTATO COME z^+ (VEDI ES. (b))

$\oplus$

SIMMETRIA RISPETTO AL
PIANO $y=0$ (xz) (VEDI ES. (a))

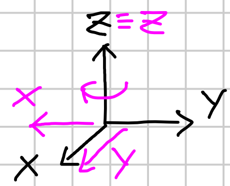
$$\text{INFATTI: } A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&-1\\1&0&0\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{\text{SIMM. (a)}}\underbrace{\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}}_{\text{ROT. (b)}}$$

? EQUIV. A ROT. INTORNO A RETTA r^* + SIMM. RISPETTO A
PIANO $\pi^* \perp r^*$

(f) $(y,-x,z) \rightsquigarrow f(x)=Ax+b$ $\quad A=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ $\quad b=0$ $\quad AA^T=I \rightsquigarrow$ ISOMETRIA

PUNTI FISSI: $Ax=x \rightsquigarrow (A-I)x=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-1&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}x=0 \rightsquigarrow x=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

⤳ ROTAZ. RISPETTO A RETTA ASSE z
DI ANGOLO 90° IN SENSO ORARIO PER
OMINO ORIENTATO COME z^+



INFATTI: $\begin{cases} P\in xy \quad P=(1,0,0) \rightsquigarrow P'=(0,-1,0)\in xy \\ \text{ANGOLO}(OP,OP'):\ \cos\theta=\dfrac{0}{1\cdot 1}=0 \rightsquigarrow \theta=\pm 90^\circ \end{cases}$

(g) $(3+x, 5+y, 7+z) \rightsquigarrow f(x)=Ax+b \quad A=I \quad b=\begin{pmatrix}3\\5\\7\end{pmatrix} \rightsquigarrow$ ISOMETRIA $\equiv$ TRASL. b

(h) $(3-x, 5+y, 7+z) \rightsquigarrow f(x)=Ax+b \quad A=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \quad b=\begin{pmatrix}3\\5\\7\end{pmatrix} \quad A^TA=I \rightsquigarrow$ ISOMETRIA

PUNTI FISSI: $Ax+b=x \rightsquigarrow (A-I)x=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}x=\begin{pmatrix}-3\\-5\\-7\end{pmatrix} \rightsquigarrow$ NESSUN P.TO FISSO

$g(x)=Ax \equiv$ SIMM. RISPETTO AL PIANO $x=0$

RISPETTO AL PIANO $x=0$: $b=b_\perp+b_{/\!/}$ $\begin{cases} b_\perp=(3,0,0)\\ b_{/\!/}=(0,5,7)\end{cases}$

$\rightsquigarrow f(x)=\overbrace{A(x-b_\perp/2)+b_\perp/2}^{\text{SIMMETRIA}}+\overset{\text{TRASL.}/\!/}{b_{/\!/}} \equiv$ SIMMETRIA RISPETTO AL PIANO $x=\frac{3}{2}$ $\oplus$ TRASLAZIONE DI $b_{/\!/}$

(i) $(3+x, 5-y, 7-z) \rightsquigarrow f(x)=Ax+b \quad A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix} \quad b=\begin{pmatrix}3\\5\\7\end{pmatrix} \quad A^TA=I \rightsquigarrow$ ISOMETRIA

PUNTI FISSI: $Ax+b=x \rightsquigarrow (A-I)x=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-2&0\\0&0&-2\end{pmatrix}x=\begin{pmatrix}-3\\-5\\-7\end{pmatrix} \rightsquigarrow$ NESSUN P.TO FISSO

$g(x)=Ax \equiv$ ROTAZIONE DI 180° RISPETTO AD ASSE X

INFATTI: $\begin{cases} Ax=x \rightsquigarrow (A-I)x=0 \quad x=\delta(1,0,0)\\ P=(0,1,0) \rightsquigarrow P'=(0,-1,0) \quad \text{ANGOLO}(OP,OP')=180^\circ\end{cases}$

RISPETTO AD ASSE X $b=b_{/\!/}+b_\perp$ $\begin{cases} b_{/\!/}=(3,0,0)\\ b_\perp=(0,5,7)\end{cases}$

$\rightsquigarrow f(x)=\overbrace{A(x-b_\perp/2)+b_\perp/2}^{\text{ROTAZ. }180^\circ}+\overset{\text{TRASL.}/\!/}{b_{/\!/}} \equiv$ ROTAZIONE DI 180° RISPETTO A RETTA $(0,5/2,7/2)+\delta(1,0,0)$ + TRASLAZIONE $/\!/$ DI VETTORE $b_{/\!/}=(3,0,0)$

(l) $(3-x, 5-y, 7-z) \rightsquigarrow f(x)=Ax+b \quad A=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix} \quad b=\begin{pmatrix}3\\5\\7\end{pmatrix} \quad A^T A=I \rightsquigarrow$ ISOMETRIA

PUNTI FISSI: $Ax+b=x \rightsquigarrow (A-I)x=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&-2&0\\0&0&-2\end{pmatrix}x=\begin{pmatrix}-3\\-5\\-7\end{pmatrix} \rightsquigarrow x=b/2=\begin{pmatrix}3/2\\5/2\\7/2\end{pmatrix}$

1 P.TO FISSO

$\rightsquigarrow f(x)=A(x-b/2)+b/2$ $\equiv$ SIMM. CENTRALE RISPETTO AL P.TO b

(m) $(3+x, 5+z, 7+y) \rightsquigarrow f(x)=Ax+b \quad A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} \quad b=\begin{pmatrix}3\\5\\7\end{pmatrix} \quad A^T A=I \rightsquigarrow$ ISOMETRIA

PUNTI FISSI: $Ax+b=x \rightsquigarrow (A-I)x=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}x=\begin{pmatrix}-3\\-5\\-7\end{pmatrix} \rightsquigarrow$ NESSUN P.TO FISSO

$g(x)=Ax \equiv$ SIMMETRIA RISPETTO AL PIANO $y-z=0$

INFATTI: $Ax=x \rightsquigarrow x=\delta(1,0,0)+s(0,1,1) \equiv y-z=0$

RISPETTO AL PIANO $y-z=0$: $b=b_\perp+b_{/\!/}$:

$\begin{cases} b_\perp=(0,s,-s) \\ b_{/\!/}=(3,5-s,7+s) \end{cases} \quad b_{/\!/}\in\pi \rightsquigarrow 5-s-7-s=0 \quad s=-1 \quad \begin{cases} b_\perp=(0,-1,1) \\ b_{/\!/}=(3,6,6) \end{cases}$

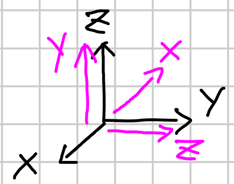
PIANO $\pi' /\!/ y-z=0$: $\quad y-z+\alpha=0 \quad b_\perp/2\in\pi' \rightsquigarrow -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\alpha=0 \quad \alpha=1$

$f(x)=\overbrace{A(x-b_\perp/2)+b_\perp/2}^{\text{SIMM. PIANO } \pi'}+\overset{\text{TRASC. }/\!/}{b_{/\!/}}$ $\equiv$ SIMM. RISPETTO AL PIANO π': $y-z+1=0$ + TRASLAZIONE $/\!/$ DI VETTORE $b_{/\!/}$

(n) $(3-x, 5+z, 7+y) \rightsquigarrow f(x)=Ax+b \quad A=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} \quad b=\begin{pmatrix}3\\5\\7\end{pmatrix} \quad A^T A=I \rightsquigarrow$ ISOMETRIA

PUNTI FISSI: $Ax+b=x \rightsquigarrow (A-I)x = \begin{pmatrix}-2&0&0\\0&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix} x = \begin{pmatrix}-3\\-5\\-7\end{pmatrix} \rightsquigarrow$ NESSUN P.TO FISSO

$g(x) = Ax \equiv$ ROTAZIONE DI $180°$ ATTORNO ALLA RETTA $r: \sigma(0,1,1)$



$$\begin{cases} \text{INFATTI: } Ax=x \rightsquigarrow x=\sigma(0,1,1) \\ P\in \sigma \perp r \quad P=(1,0,0) \rightsquigarrow P'(-1,0,0) \quad \theta = 180° \end{cases}$$

RISPETTO A RETTA r: $b = b_\perp + b_{/\!/}$:

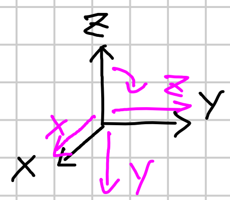
$$\begin{cases} b_{/\!/} = (0,s,s) \\ b_\perp = (3, 5-s, 7-s) \end{cases} \quad \langle b_\perp, v\rangle = 5-s+7-s = 12-2s = 0 \quad s=6 \quad \begin{cases} b_{/\!/} = (0,6,6) \\ b_\perp = (3,-1,1) \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow f(x) = \overbrace{A(x - b_\perp/2) + b_\perp/2}^{\text{ROTAZIONE}} + \overbrace{b_{/\!/}}^{\text{TRASL.} /\!/}$$ $\equiv$ ROTAZIONE DI $180°$ RISPETTO A RETTA $(3/2,-1/2,1/2)+\sigma(0,1,1)$ + TRASLAZIONE PARALLELA DI VETTORE $b_{/\!/}$

(σ) $(3+x, 5+z, 7-y) \rightsquigarrow f(x) = Ax+b \quad A = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix}3\\5\\7\end{pmatrix} \quad A^T A = I \rightsquigarrow$ ISOMETRIA

PUNTI FISSI: $Ax+b=x \rightsquigarrow (A-I)x = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&-1\\0&1&-1\end{pmatrix} x = \begin{pmatrix}-3\\-5\\-7\end{pmatrix} \rightsquigarrow$ NESSUN P.TO FISSO

$g(x) = Ax \equiv$ ROTAZIONE ORARIA DI $90°$ RISPETTO ASSE x^+



$$\begin{cases} \text{INFATTI: } Ax=x \rightsquigarrow x=\sigma(1,0,0) \\ P\in yz \quad P=(0,1,0) \rightsquigarrow P' = (0,0,-1) \quad \theta = \pm 90° \end{cases}$$

RISPETTO ASSE X: $b = b_\perp + b_{/\!/}$ $\begin{cases} b_\perp = (0,5,7) \\ b_{/\!/} = (3,0,0) \end{cases}$

$$Ax + b_\perp = x \rightsquigarrow (A-I)x = -b_\perp \rightsquigarrow \begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&-1\\0&0&-2\end{pmatrix} x = \begin{pmatrix}0\\-5\\-12\end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix}0\\-1\\6\end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ PUNTO FISSO: $P_0 = (0,-1,6)$

$$\rightsquigarrow f(X)=\overbrace{A(X-P_0)+P_0}^{\text{ROTAZIONE}}\ \overbrace{+b_{//}}^{\text{TRASL.//}}$$

$\equiv$ ROTAZIONE ORARIA DI $90°$ (OMINO // X^+) RISPETTO A RETTA $(0,-1,6)+\delta(1,0,0)$ + TRASLAZIONE // DI VETTORE $b_{//}$

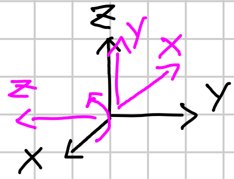
(p) $(3-x,5-z,7+y) \rightsquigarrow f(x)=Ax+b$ $\quad A=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$ $\quad b=\begin{pmatrix}3\\5\\7\end{pmatrix}$ $\quad A^TA=I \rightsquigarrow$ ISOMETRIA

PUNTI FISSI: $Ax+b=x \rightsquigarrow (A-I)X=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&-1&-1\\0&1&-1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}-3\\-5\\-7\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}-2&0&0\\0&-1&-1\\0&0&-2\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}-3\\-5\\-12\end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow X=(3/2,-1,6)$ $\quad$ 1 P.TO FISSO

$g(x)=Ax \equiv$ ROTAZ. ANTIORARIA DI $90°$ RISPETTO A X^+

+ SIMMETRIA RISPETTO PIANO YZ



INFATTI:

$$A=\overset{A_2}{\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}\overset{A_1}{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}}$$

$\rightsquigarrow$ ROTAZIONE DI $90°$ ANTIORARIA (OMINO // X^+) RISPETTO A RETTA

$r: \overset{P_0}{(3/2,-1,6)}+\delta(1,0,0)$ + SIMM. RISPETTO A PIANO δ: $X=3/2$

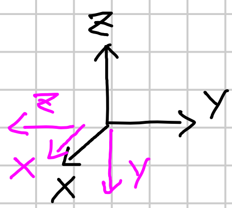
VERIFICA:

$$\begin{cases} P'=A_1(P-P_0)+P_0 \qquad P''=A_2(P'-P_0)+P_0 \\ \rightsquigarrow P''=A_2[A_1(P-P_0)+P_0-P_0]+P_0 = A_2A_1(P-P_0)+P_0 = A(P-P_0)+P_0 \end{cases}$$

(q) $(3+x,5-z,7-y) \rightsquigarrow f(x)=Ax+b$ $\quad A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}$ $\quad b=\begin{pmatrix}3\\5\\7\end{pmatrix}$ $\quad A^TA=I \rightsquigarrow$ ISOMETRIA

PUNTI FISSI: $Ax+b=x \rightsquigarrow (A-I)X=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&-1\\0&-1&-1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}-3\\-5\\-7\end{pmatrix} \rightsquigarrow$ NESSUN P.TO FISSO

$g(x)=Ax \equiv$ SIMM. RISPETTO A PIANO $y+z=0$



INFATTI: $Ax=x \rightsquigarrow x=(\delta,s,-s) \equiv y+z=0$

RISPETTO AL PIANO $y+z=0$: $b = b_\perp + b_\parallel$:

$$\begin{cases} b_\perp = (0,s,s) \\ b_\parallel = (3,5-s,7-s) \end{cases} \quad b_\parallel \in \pi \rightsquigarrow 5-s+7-s=0 \quad s=6 \qquad \begin{cases} b_\perp=(0,6,6) \\ b_\parallel=(3,-1,1) \end{cases}$$

PIANO $\pi' \parallel y+z=0$: $\quad y+z+d=0 \quad b_\perp/2 \in \pi' \rightsquigarrow 3+3+d=0 \quad d=-6$

$$f(x) = \overbrace{A(x-b_\perp/2)+b_\perp/2}^{\text{SIMM. PIANO } \pi'} + \overset{\text{TRASL.}\parallel}{\downarrow}\!\! b_\parallel$$

$\equiv$ SIMM. RISPETTO AL PIANO π': $y+z-6=0$

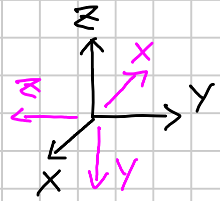
\+ TRASLAZIONE $\parallel$ DI VETTORE $b_\parallel$

(r) $(3-x,5-z,7-y) \rightsquigarrow f(x)=Ax+b \quad A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad b=\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \quad A^tA=I \rightsquigarrow$ ISOMETRIA

PUNTI FISSI: $Ax+b=x \rightsquigarrow (A-I)x = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ NESSUN PUNTO FISSO

$g(x)=Ax \equiv$ ROTAZIONE DI $180°$ ATTORNO A RETTA $r: t(0,1,-1)$

$$\begin{cases} \text{INFATTI: } Ax=x \rightsquigarrow x=t(0,1,-1) \\ P\in \pi \perp r \quad P=(0,1,1) \rightsquigarrow P'=(0,-1,-1) \quad \theta = 180° \end{cases}$$



RISPETTO A RETTA r: $b=b_\perp+b_\parallel$:

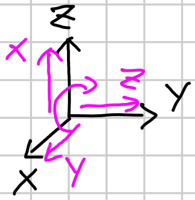
$$\begin{cases} b_\parallel = (0,s,-s) \\ b_\perp = (3,5-s,7+s) \end{cases} \quad \langle b_\perp, v\rangle = 5-s-7-s=0 \quad s=-1 \qquad \begin{cases} b_\parallel=(0,-1,1) \\ b_\perp=(3,6,6) \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow f(x) = \overbrace{A(x-b_\perp/2)+b_\perp/2}^{\text{ROTAZIONE}} + \overset{\text{TRASL.}\parallel}{\downarrow}\!\! b_\parallel$$

$\equiv$ ROTAZIONE DI $180°$ RISPETTO A RETTA $(3/2,3,3)+t(0,1,-1)$ + TRASLAZIONE PARALLELA DI VETTORE $b_\parallel$

(1) $(3+y,5+z,7+x) \rightsquigarrow f(x)=Ax+b \quad A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad b=\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \quad A^tA=I \rightsquigarrow$ ISOMETRIA

PUNTI FISSI: $Ax+b=x \rightsquigarrow (A-I)x=\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&1\\1&0&-1\end{pmatrix}x=\begin{pmatrix}-3\\-5\\-7\end{pmatrix} \rightsquigarrow$ NESSUN PUNTO FISSO



$g(x)=Ax \equiv$ ROTAZ. ORARIA DI $120°$ RISPETTO A OMINO $/\!/ z^+$
RISPETTO A RETTA r: $\delta(1,1,1)$ (Vd. ES. (b))

RISPETTO A RETTA r: $b=b_\perp+b_{/\!/}$:

$$\begin{cases} b_{/\!/}=(\delta,\delta,\delta) \\ b_\perp=(3-\delta,5-\delta,7-\delta) \end{cases} \quad \langle b_\perp, v\rangle=0 \quad 15-3\delta=0 \quad \delta=5 \quad \begin{cases} b_{/\!/}=(5,5,5) \\ b_\perp=(-2,0,2) \end{cases}$$

$$Ax+b_\perp=x \rightsquigarrow (A-I)x=-b_\perp \quad \begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&1\\1&0&-1\end{pmatrix}x=\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix} \rightsquigarrow x=\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}+\delta\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ PUNTO FISSO $P_0=(-2,0,0)$

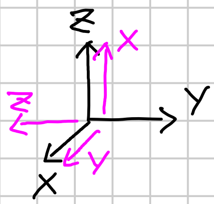
$$\rightsquigarrow f(x)=\overbrace{A(x-P_0)+P_0}^{\text{ROTAZIONE}}+\underset{\text{TRASL.}/\!/}{b_{/\!/}}$$

$\equiv$ ROTAZIONE DI $120°$ ORARIA (OMINO $/\!/ z^+$)
RISPETTO A RETTA $(-2,0,0)+\delta(1,1,1)$
+ TRASLAZIONE DI VETTORE $b_{/\!/}$

(δ) $(3+y,5-z,7+x) \rightsquigarrow f(x)=Ax+b \quad A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&-1\\1&0&0\end{pmatrix} \quad b=\begin{pmatrix}3\\5\\7\end{pmatrix} \quad A^TA=I \rightsquigarrow$ ISOMETRIA

PUNTI FISSI: $Ax+b=x \rightsquigarrow (A-I)x=\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&-1\\1&0&-1\end{pmatrix}x=\begin{pmatrix}-3\\-5\\-7\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&-1\\0&0&-2\end{pmatrix}x=\begin{pmatrix}-3\\-5\\-15\end{pmatrix}$

$$\begin{cases} z=15/2 \\ y=5-15/2=-5/2 \\ x=3-5/2=1/2 \end{cases} \rightsquigarrow$$ 1 P.TO FISSO $P_0=(1/2,-5/2,15/2)$



$g(x)=Ax \equiv$ ROTAZ. RISPETTO A RETTA r: $\delta(1,1,1)$
DI ANGOLO $120°$ IN SENSO ORARIO (OMINO $/\!/ z^+$)
+ SIMM. RISPETTO AL PIANO $y=0$ (Vd. ES (e))

(u) $(3-y, 5+z, 7-x) \rightsquigarrow f(x)=Ax+b$ $\quad A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad b=\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ $\quad A^T A = I \rightsquigarrow$ ISOMETRIA

PUNTI FISSI: $Ax+b=x \rightsquigarrow (A-I)x = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ NESSUN PUNTO FISSO

$g(x)=Ax \quad Ax=x \rightsquigarrow x=\delta(-1,1,1)$

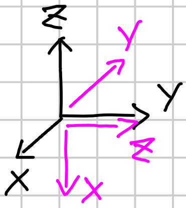
$\equiv$ ROTAZ. ANTIORARIA $120°$ (OMINO // r^+)

RISPETTO A RETTA r: $\delta(-1,1,1)$

PIANO $\sigma \perp r$: $-x+y+z=0$

$P \in \sigma$ $\quad P=(1,1,0) \rightsquigarrow P'=(-1,0,-1) \in \sigma$

ANGOLO(OP, OP'): $\cos\theta = \dfrac{-1}{2} \rightsquigarrow \theta = \pm 120°$



RISPETTO A RETTA r: $\delta(-1,1,1)$ $\quad b = b_\perp + b_{//}$

$\begin{cases} b_{//} = (-\delta, \delta, \delta) \\ b_\perp = (3+\delta, 5-\delta, 7-\delta) \end{cases}$ $\langle b_\perp, v\rangle = -3+5+7-3\delta = 0 \quad \delta = 3$ $\begin{cases} b_{//} = (-3,3,3) \\ b_\perp = (6,2,4) \end{cases}$

$Ax+b_\perp = x \rightsquigarrow (A-I)x = -b_\perp \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow x = \underbrace{(4,2,0)}_{P_0} + \delta(-1,1,1) \equiv$ RETTA FISSA

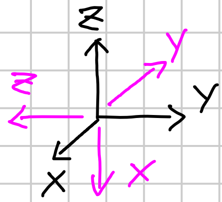
$\rightsquigarrow f(x) = A(x-P_0)+P_0+b_{//} \equiv$ ROTAZ. $120°$ ANTIORARIA (OMINO // r^+)
RISPETTO A RETTA $(4,2,0)+\delta(-1,1,1)$
+ TRASLAZIONE DI VETTORE $b_{//}$

(v) $(3-y, 5-z, 7-x) \rightsquigarrow f(x)=Ax+b$ $\quad A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad b=\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ $\quad A^T A = I \rightsquigarrow$ ISOMETRIA

PUNTI FISSI: $Ax+b=x \rightsquigarrow (A-I)x = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ -9 \end{pmatrix}$

$z = 9/2 \quad y = 5-9/2 = 1/2 \quad x = 3-1/2 = 5/2 \rightsquigarrow$ 1 P.TO FISSO $P_0 = (5/2, 1/2, 9/2)$

$g(x)=Ax \quad Ax=0 \rightsquigarrow x=0$



$\equiv$ ROTAZIONE DI $120°$ ANTIORARIA (OMINO // z^+)
ATTORNO ALLA RETTA $r: \sigma(-1,1,1)$ + SIMMETRIA
RISPETTO A PIANO $y=0$

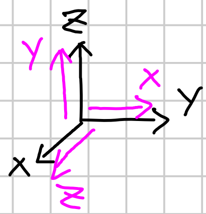
$$A=\underset{\text{SIMM.}}{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}\underset{\text{ROTAZ.}}{\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&1\\-1&0&0\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\-1&0&0\end{pmatrix}$$

? EQUIV. A ROT. INTORNO A RETTA r^* + SIMM. RISPETTO A PIANO $\pi^* \perp r^*$

(z) $(3+z,5+x,7+y) \rightsquigarrow f(x)=Ax+b \quad A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix} \quad b=\begin{pmatrix}3\\5\\7\end{pmatrix} \quad A^TA=I \rightsquigarrow$ ISOMETRIA

PUNTI FISSI: $Ax+b=x \rightsquigarrow (A-I)x=\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&-1&0\\0&1&-1\end{pmatrix}x=\begin{pmatrix}-3\\-5\\-7\end{pmatrix} \rightsquigarrow$ NESSUN PUNTO FISSO

$g(x)=Ax \quad Ax=x \rightsquigarrow x=\sigma(1,1,1)$



$\equiv$ ROTAZIONE DI $120°$ ANTIORARIA (OMINO // z^+)
ATTORNO ALLA RETTA $r: \sigma(1,1,1)$

RISPETTO A RETTA r: $b=b_\perp+b_{//}$:

$$\begin{cases}b_{//}=(\sigma,\sigma,\sigma)\\ b_\perp=(3-\sigma,5-\sigma,7-\sigma)\end{cases} \quad \langle b_\perp, v\rangle=0 \quad 15-3\sigma=0 \quad \sigma=5 \quad \begin{cases}b_{//}=(5,5,5)\\ b_\perp=(-2,0,2)\end{cases}$$

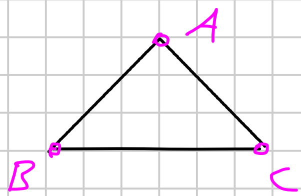
$$Ax+b_\perp=x \rightsquigarrow (A-I)x=-b_\perp \quad \begin{pmatrix}-1&0&1\\1&-1&0\\0&1&-1\end{pmatrix}x=\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix} \rightsquigarrow x=\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}+\sigma\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ PUNTO FISSO $P_0=(0,0,2)$

$\rightsquigarrow f(x)=\overbrace{A(x-P_0)+P_0}^{\text{ROTAZIONE}}+\overset{\text{TRASL.}//}{b_{//}}$ $\equiv$ ROTAZIONE DI $120°$ ANTIOR. (OMINO // z^+)
RISPETTO A RETTA $(0,0,2)+\sigma(1,1,1)$
+ TRASLAZIONE DI VETTORE $b_{//}$

3. Consideriamo i 3 punti $A = (1,2,4)$, $B = (1,3,6)$, $C = (-1,3,4)$. Determinare le espressioni di tutte le isometrie dello spazio che mandano il triangolo ABC in se stesso (ma non è detto che mandino A in A, B in B e C in C).

$$\begin{cases} AB = B-A = (0,1,2) & \|AB\| = \sqrt{5} \\ AC = C-A = (-2,1,0) & \|AC\| = \sqrt{5} \\ BC = C-B = (-2,0,-2) & \|BC\| = 2\sqrt{2} \end{cases}$$



1) TUTTO $\mathbb{R}^3$ FISSO: $f(X) = IX = X$

2) PIANO FISSO: π_{ABC} FISSO $\quad n = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-2,-4,2)$

$\rightsquigarrow -2x-4y+2z+d=0 \quad A \in \pi \quad -2-8+8+d=0$

$d=2 \qquad x+2y-z-1=0$

SIMMETRIA RISPETTO AL PIANO $\pi_0 // \pi$: $x+2y-z=0$

BASE: $\begin{cases} v_1, v_2 \in \text{PIANO} & v_1 = AB = (0,1,2) \quad v_2 = AC = (-2,1,0) \\ v_3 \perp \text{PIANO} & v_3 = n = (1,2,-1) \end{cases}$

IN BASE $\{v_1, v_2, v_3\}$: $\hat{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

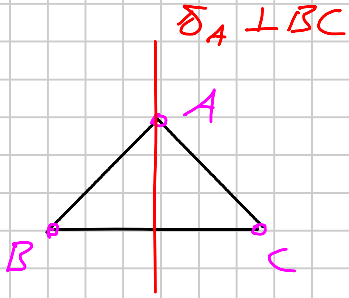
IN BASE CANONICA: $M = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$ $\quad \text{DET}(M) = -8-2-2 = -12$

$$M^{-1} = -\frac{1}{12} \begin{pmatrix} -1 & +5 & -2 \\ -2 & -2 & -4 \\ -5 & +1 & 2 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -5 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow S = M\hat{S}M^{-1} = \frac{1}{12} M \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -5 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 8 & -8 & 4 \\ -8 & -4 & 8 \\ 4 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

VER. $Sv_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $Sv_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $Sv_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow f(x) = S(x-A)+A$ ≡ SIMM. RISPETTO π_{ABC}



3) PIANO FISSO: $\pi_A \perp BC$ $n=(1,0,1)$

$x+z+d=0$ $A \in \pi$ $1+5+d=0$

$x+z-5=0$

SIMMETRIA RISPETTO AL PIANO $\pi_0 // \pi_A : x+z=0$

BASE: $\begin{cases} v_1, v_2 \in \text{PIANO} & v_1=(1,0,-1),\ v_2=(0,1,0) \\ v_3 \perp \text{PIANO} & v_3 = n = (1,0,1) \end{cases}$

IN BASE $\{v_1,v_2,v_3\}$: $\hat{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

IN BASE CANONICA: $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ DET$(M) = 1+1 = 2$

$$M^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S = M\hat{S}M^{-1} = \frac{1}{2} M \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

VER. $Sv_1 = v_1$ $Sv_2 = v_2$ $Sv_3 = -v_3$

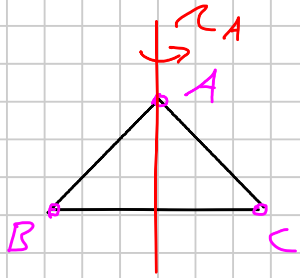
$\rightsquigarrow f(x) = S(x-A)+A$ ≡ SIMM. RISPETTO A PIANO $\pi_A \perp BC$

VER. $f(A) = A$ $f(B) = S(AB)+A = (-2,1,0)+(1,2,5) =$

$= (-1,3,5) = C$

$f(C) = S(AC)+A = (0,1,2)+(1,2,5) = (1,3,6) = B$

4) RETTA FISSA : ROT. 180° RETTA PER $A \perp BC$



$$V = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (4,-4,-4)$$

$r_A: (1,2,4) + \sigma(1,-1,-1)$

ROT. 180° RISPETTO A RETTA $r_0 \parallel r_A$: $\sigma(1,-1,-1)$

BASE ORTOG.: $\begin{cases} \hat{v}_1, \hat{v}_2 \perp r_0 & \hat{v}_1 = (1,1,0) \quad \hat{v}_2 = (1,-1,2) \\ \hat{v}_3 \parallel r_0 & \hat{v}_3 = (1,-1,-1) \end{cases}$

BASE ORTONORM.: $\begin{cases} v_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0) \quad v_2 = (1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}) \\ v_3 = (1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}) \end{cases}$

IN BASE $\{v_1, v_2, v_3\}$: $\hat{S} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

IN BASE CANONICA: $M = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$ $\quad M^{-1} = M^T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$

$$S = M\hat{S}M^{-1} = M \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

VER. $S \cdot AB = AC$

$\rightsquigarrow f(x) = S(x-A) + A \equiv$ SIMM. RISPETTO A RETTA $r_A \perp BC$