Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica/Telecomunicazioni

Scritto d'esame di Algebra Lineare

Pisa, 15 Febbraio 2014

1. Consideriamo i seguenti 3 punti nello spazio:

$$A = (1, 0, 1), \qquad B = (0, 2, 0), \qquad C = (-1, 2, -3).$$

   (a) Determinare la lunghezza ed il piede dell'altezza del triangolo ABC uscente dal vertice A.

   (b) Determinare l'area del triangolo ABC.

   (c) Sia r la retta passante per C e parallela alla retta AB. Determinare il punto di intersezione e l'angolo formato tra r ed il piano $x - y = 0$.

2. Consideriamo, al variare dei parametri reali a e b, il sistema lineare

$$\begin{aligned} x + ay + z &= 0 \\ 2x - y + bz &= 2 \\ 3x + 2z &= 5 \end{aligned}$$

   Determinare per quali valori dei parametri il sistema ammette soluzione non unica, ed in tali casi determinare esplicitamente l'insieme delle soluzioni.

3. Consideriamo la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ a & 7 \end{pmatrix}$, dove a è un parametro reale.

   (a) Determinare per quali valori di a la matrice A ammette l'autovalore $\lambda = 5$. Per tali valori di A, determinare una matrice invertibile M tale che $M^{-1}AM$ sia diagonale.

   (b) Determinare per quali valori di a esiste una matrice *ortogonale* M tale che $M^{-1}AM$ sia diagonale, ed in tal caso determinare tale matrice diagonale.

4. Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ il sottospazio W di equazione cartesiana $x + y - 2z = 0$ ed il prodotto scalare rappresentato, rispetto alla base canonica, dalla matrice

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

   (a) Dimostrare che il prodotto scalare è definito positivo.

   (b) Determinare una base ortogonale di W (rispetto al prodotto scalare rappresentato da B) costituita da vettori a coordinate intere.

   (c) Determinare $W^{\perp}$ (sempre rispetto al prodotto scalare di matrice B).

Si ricorda che ogni passaggio deve essere *adeguatamente* giustificato.
Ogni esercizio verrà valutato in base alla *correttezza* ed alla *chiarezza* delle spiegazioni fornite. La sola scrittura del risultato non ha alcun valore.