Data la successione di Cauchy $\{x_n\}$ a valori in **R** , so che:

per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_0 \in \boldsymbol{N}$ t.c. $d(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \forall n > n_0, \forall m > n_0$.

Posso scegliere $\varepsilon = 1$, esiste allora n_0 t.c. $d(x_n, x_m) < 1 \ \forall n > n_0, \forall m > n_0$. In particolare prendo $n = n_0$, quindi

$$d(x_{n_0}, x_m) < 1 \ \forall m > n_0$$

L'ultima relazione mi dice che tutti i termini della successione stanno in una palla con centro x_{n_0} e raggio 1, tranne un numero finito: $S = \{x_1, x_2, \dots \dots, x_{n_0-1}\}$.

La mia domanda a questo punto è: chi mi garantisce che ogni elemento di S sia contenuto in una palla di centro x_{n_0} e raggio $r < +\infty$?

O in altre parole, chi mi garantisce che esiste il $Max\{ d(x_1, x_{n_0}), d(x_2, x_{n_0}), \dots \dots, d(x_{n_0-1}, x_{n_0})\}$?

Su internet trovo risposte tipo: "dato che S ha un numero finito di elementi, allora ammette massimo" . Ma non riesco a capire il perché. Per me uno degli elementi di S potrebbe distare tranquillamente $+\infty$ da x_{n_0} .

Ovviamente sbaglio qualcosa…ma cosa?