

Calcolare il flusso uscente dei vettori  $\vec{\phi}$  dati dai domini  $\Omega$  assegnati; cioè calcolare

$$\int_{\partial\Omega} (\vec{\phi} \cdot \vec{\nu}) d\sigma$$

dove  $\vec{\nu}$  è la normale esterna.

**\*\*\*\* Esercizio 12** (*Ghisi, Gobbino*)

Siano dati il dominio

$$\Omega_{12} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq y \leq z \leq x^2 \leq 1\}$$

ed il vettore  $\vec{\phi}_{12}$  le cui componenti sono

$$\vec{\phi}_{12} = (y^2, x^2, z^2)$$

**Soluzione dell'esercizio 12**

Per il teorema della divergenza, il flusso di  $\vec{\phi}_{12}$  uscente dal bordo  $\partial\Omega_{12}$ , è dato da

$$\int_{\partial\Omega_{12}} \vec{\phi}_{12} \cdot \vec{\nu}_{12} ds = \int_{\Omega_{12}} \operatorname{div} \vec{\phi}_{12} dx dy dz = 2 \int_{\Omega_{12}} z dx dy dz$$

Dato il dominio  $\Omega_{12}$ , se gli estremi di integrazione sono corretti, dovrebbe essere

$$2 \int_{\Omega_{12}} z dx dy dz = 2 \int_0^1 dx \int_0^{x^2} z dz \int_0^z dy = 2 \int_0^1 dx \int_0^{x^2} z^2 dz = \frac{2}{3} \int_0^1 x^6 dx = \frac{2}{21}$$