Si considerino le curve a valori in $\mathbb{R}^2$ di cui viene fornita la parametrizzazione e l'intervallo di variabilità del parametro t. Determinare se si tratta di curve chiuse, semplici, e la retta tangente nel punto della curva corrispondente a $t = 0$. Di tale retta scrivere sia l'equazione parametrica $(a + bt, c + dt)$, sia l'equazione cartesiana implicita $(ax + by + c = 0)$.

*** Esercizio 15 (*Ghisi, Gobbino*)

Sia data la curva

$$\gamma(t) \,:\, \begin{cases} x(t) = t^2 + t \\ y(t) = \sin^2(t) \end{cases} \qquad -\pi \leq t \leq \pi$$

Soluzione dell'esercizio 15

Calcoliamo il valore di $\gamma(t)$ agli estremi dell'intervallo di variabilità del parametro t :

$$\gamma(-\pi) : \begin{cases} x(-\pi) = \pi^2 - \pi \\ y(-\pi) = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \gamma(\pi) : \begin{cases} x(\pi) = \pi^2 + \pi \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$$

Poiché gli estremi della curva non coincidono, la curva $\gamma(t)$ non è chiusa.

Verifichiamo adesso se $\gamma(t)$ è semplice :
supponendo che non lo sia, allora esiste $s \in [-\pi, \pi]$, con $t \neq s$, tale che

$$\begin{cases} t^2 + t - s^2 - s = 0 \\ \sin^2(t) - \sin^2(s) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (t - s) + (t - s)(t + s) = 0 \\ [\sin(t) - \sin(s)][\sin(t) + \sin(s)] = 0 \end{cases}$$

da cui, raccogliendo il fattore comune nella prima equazione e applicando le formule di prostaferesi nella seconda, segue che

$$\begin{cases} (t - s)[1 + (t + s)] = 0 \\ \sin(t + s)\sin(t - s) = 0 \end{cases}$$

Poiché il sistema è soddisfatto se e solo se $t = s$, " risulterebbe " che la curva è semplice, contrariamente a quanto indicato nel testo e dal grafico della curva.