

Corso di laurea in Ingegneria Gestionale
Esame di ALGEBRA LINEARE - anno accademico 2025/2026

Prova scritta del 18/12/2025
TEMPO A DISPOSIZIONE: 120 minuti

XXXXXX										MARCO	XXXXXXXXXX					XXXXXXXXXX				
(Cognome)											(Nome)					(Numero di matricola)				

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 risposta sbagliata = -1
calcoli e spiegazioni non sono richiesti

• Sia $z = 1 + i\sqrt{3}$. Allora $z^3 =$ $8 \cdot e^{i\pi}$

Dati W e Z i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 - 4x_2 + x_3 = 0 \right\}, Z = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

• $\mathbb{R}^3 = W + Z$ ~~vero~~ falso

• Determinare una base di $W \cap Z$

$\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$ • $\dim(\text{Ker}(\mathcal{L}_A)) =$ 3 • $\text{rg}(A) =$ 3

• $\det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} =$ -27 • $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A$ è diagonalizzabile ~~vero~~ falso

• Le soluzioni del sistema $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ costituiscono uno spazio affine di dimensione = 3

• $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A \cdot B =$ $\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$

• Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lineare. Sapendo che $f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, f \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$, allora $f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\textcircled{1} \begin{cases} (z+6)^4 = 9 \cdot \overline{(z+6)}^2 \\ |z| \leq 3 \end{cases}$$

(i) sostituzione $w = z+6 \quad (\rightarrow z = w-6)$

$$w = \rho \cdot e^{i\vartheta} \Rightarrow w^4 = \rho^4 \cdot e^{i4\vartheta}$$

$$\overline{w}^2 = \rho^2 \cdot e^{-i2\vartheta}$$

$$\overline{z+6} = \overline{w} \Rightarrow$$

$$\text{eq(i)} \hookrightarrow \rho^4 \cdot e^{i4\vartheta} = 9 \cdot \rho^2 \cdot e^{-i2\vartheta}$$

$$\hookrightarrow \begin{cases} \rho^4 = 9\rho^2, & \rho \in \mathbb{R}^+ \\ 4\vartheta = -2\vartheta + 2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Sol. distinte:

$$\rho = 0$$

$$\hookrightarrow w = 0$$

$$\begin{cases} \rho = 3 \\ \vartheta = \frac{2k\pi}{6} \end{cases} \quad k = 0, 1, \dots, 5$$

(2)

$$w_0 = 3$$

$$w_1 = 3 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{3}{2} + i \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$w_2 = 3 \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$w_3 = 3 \cdot e^{i\pi} = -3$$

$$w_4 = 3 \cdot e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

$$w_5 = 3 \cdot e^{i\frac{5\pi}{3}}$$

$$w_6 = 0$$

$$z_0 = 3 - 6 = -3$$

$$z_1 = -\frac{9}{2} + i \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

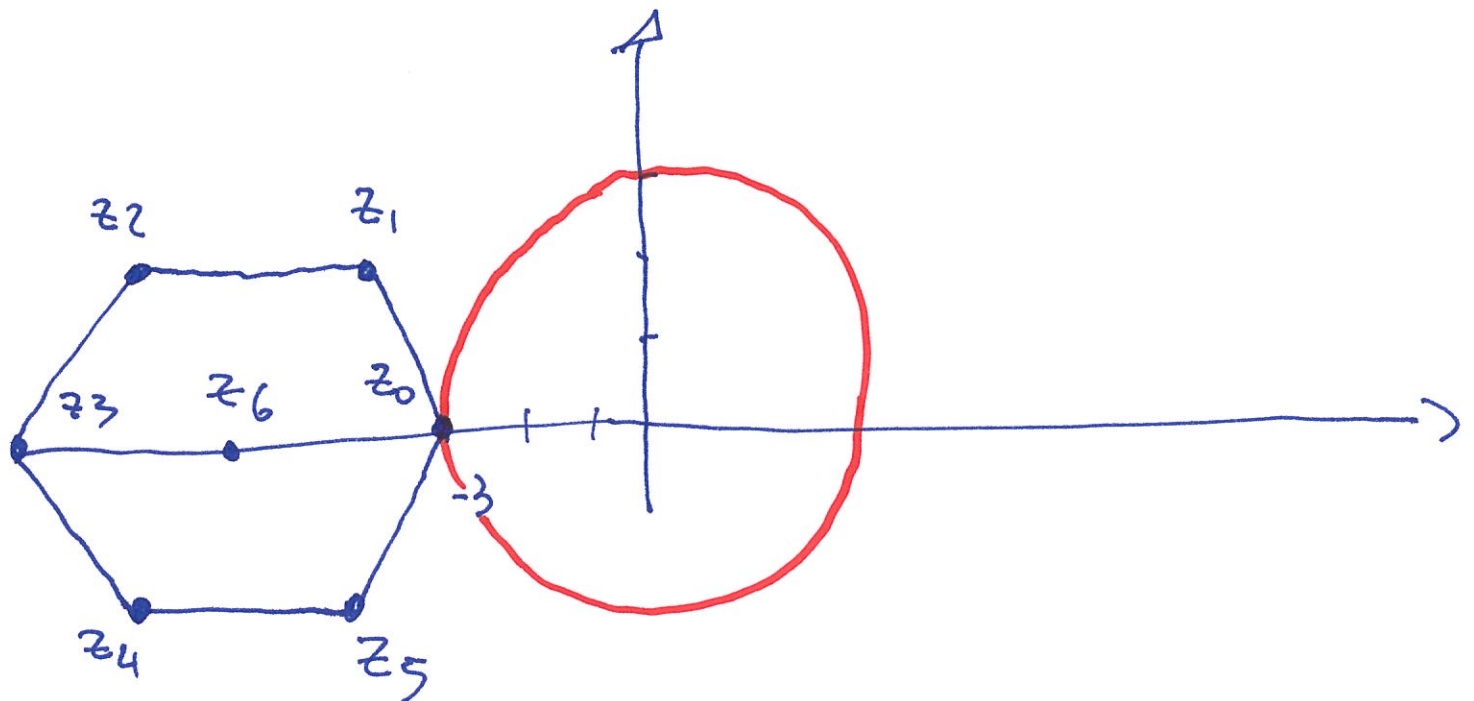
$$z_2 = -\frac{15}{2} + i \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$z_3 = -9$$

$$z_4 = -\frac{15}{2} - i \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$z_5 = -\frac{9}{2} - i \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$z_6 = -6$$



Condizione (ii) $\Leftrightarrow |z| \leq 3$

Se $z = x + iy$ allora $\sqrt{x^2 + y^2} \leq 3$

(3)

GRAFICAMENTE :

Le soluzioni devono appartenere
 al cerchio di raggio 3
 e centro l'origine

ALGEBRICAMENTE :

$$|z_0| = |-3| = 3 \quad \text{o.k.}$$

$$|z_1| = \sqrt{\frac{81}{4} + \frac{9 \cdot 3}{4}} > 3$$

$$|z_2| = \sqrt{\frac{225}{4} + \frac{27}{4}} > 3$$

$$|z_3| = |1-9| = 8 > 3$$

$$|z_4| = |z_2| > 3$$

$$|z_5| = |z_1| > 3$$

conclusione: unica soluzione

$$z_0 = -3$$

(4)

$$② \quad A_t = \begin{pmatrix} 3 & t & -4 \\ 0 & -1 & t \\ \cancel{1} & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$i) \det(A_t) = \dots = t^2 + 9t - 10$$

$$\det(A_t) = 0 \Leftrightarrow t = -1, +10$$

$$\bullet t \neq -1, 10 \quad \begin{cases} \text{rk} = 3 \\ \dim(\text{ker}) = 0 \end{cases}$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{he } \det \neq 0 \quad \forall t \\ \Rightarrow \text{rk} \geq 2 \quad \forall t$$

$$\bullet t = -1, 10$$

$$\begin{cases} \text{rk} = 2 \\ \dim(\text{ker}) = 3 - 2 = 1 \end{cases}$$

$$ii) \quad A_t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

sisteme 3 eq. 3 incognite

(5)

$$\bullet t \neq -1, 10$$

$$\operatorname{rk}(A_t) = 3 \leq \operatorname{rk}(A_t | b) \leq 3$$

$$\Rightarrow \operatorname{rk}(A_t) = \operatorname{rk}(A_t | b) = 3 = \# \text{ incognite}$$

$$\Rightarrow \exists ! \text{ sol.}$$

$$\bullet t = 10$$

$$b = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \text{colonne 2 di } A$$

$$\Rightarrow \operatorname{rk}(A_t) = \operatorname{rk}(A_t | b) = 2$$

$$\Rightarrow \exists \infty \text{ soluzioni}$$

$$\bullet t = -1 \quad M = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 10 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \quad \text{he} \quad \det \neq 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{rk}(A_t | b) = 3$$

$$\text{Quindi } \operatorname{rk}(A_t | b) = 3 > 2 = \operatorname{rk}(A_t)$$

$$\Rightarrow \text{non } \exists \text{ sol.}$$

iii) Per $t = -1$

(6)

$$\dim(\text{Im}) = 2$$

$$\dim(\text{Ker}) = 1$$

BASE $\text{Im} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

colonne 1, 2 di A

~~BASE~~ $\text{Ker} \Leftrightarrow A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 - x_2 - 4x_3 = 0 \\ -x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$. QUINDI BASE
 $\text{Ker} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

I vettori $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

sono lin. IND.

QUINDI costituiscono BASE di $\mathbb{R}^3$

QUINDI $\mathbb{R}^3 = \text{Im} \oplus \text{Ker}$

$$(3) \quad f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\text{Ker}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\text{Im}(f) = \{ x_1 - 4x_2 + x_3 = 0 \}$$

Le colonne di A sono le immagini attraverso f dei vettori della base canonica.

$$\text{QUINDI} \quad \text{Ker}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \Leftrightarrow f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \text{colonna } 3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Span}(\text{colonne } 1, 2) = \text{Im}(f)$$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 = t \\ x_3 = s \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 4t - s \\ x_2 = t \\ x_3 = s \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Im}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\text{conclusione:} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(4)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = \dots = \lambda^2 \cdot (-\lambda + 5)$$

RADICI: $\lambda_0 = 0$ con m.e. = 2
 $\lambda_1 = 5$ con m.e. = 1

Quindi autovalori: $\lambda = 0$
 $\lambda_1 = 5$

m.g. (5) = 1 poiché $1 \leq \text{m.g.} \leq \text{m.e.}$

m.g. (0) = 1 poiché $\text{rg}(A) = 2$

iii) A è triang. $^{\text{le}}$ poiché $\lambda_i \in \mathbb{R}$
 A non è diag. $^{\text{le}}$ poiché $\text{m.e.}(0) = 2 > 1 = \text{m.g.}(0)$

ii) $V_0 = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$V_5 = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$