Corso di laurea in Ingegneria Gestionale
Esame di ALGEBRA LINEARE - anno accademico 2025/2026

Prova scritta del 18/12/2025
TEMPO A DISPOSIZIONE: 120 minuti

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 risposta sbagliata = -1
calcoli e spiegazioni non sono richiesti

• Sia $z = 1 + i\sqrt{3}$. Allora $z^3 =$ ☐

Dati W e Z i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \quad : \quad x_1 - 4x_2 + x_3 = 0\} \; , \; Z = \langle \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

• $\mathbb{R}^3 = W + Z$ vero | falso

• Determinare una base di $W \cap Z$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

• $\dim(Ker(\mathcal{L}_A)) =$ ☐ • $\mathrm{rg}(A) =$ ☐

• $\det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} =$ ☐ • $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow A$ è diagonalizzabile vero | falso

• Le soluzioni del sistema $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ costituiscono uno spazio affine di dimensione = ☐

• $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} , B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow A \cdot B = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$

• Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineare. Sapendo che $f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, f \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$, allora $f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$

SECONDA PARTE

I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni

Esercizio 1. [punteggio: 0-6]
Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} (z+6)^4 = 9 \cdot \overline{(z+6)}^2 \\ |z| \leq 3 \end{cases}$$

Esercizio 2. [punteggio: 0-6]
Al variare del parametro reale t sia $\mathcal{L}_{A_t} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} 3 & t & -4 \\ 0 & -1 & t \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

i) Determinare, al variare di $t \in \mathbb{R}$, $\dim(Ker(\mathcal{L}_{A_t}))$ e $\dim(Im(\mathcal{L}_{A_t}))$.

ii) Determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui esiste almeno una soluzione del sistema $A_t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

(iii) Posto $t = -1$ dire se $\mathbb{R}^3 = Im(\mathcal{L}_{A_t}) \bigoplus Ker(\mathcal{L}_{A_t})$.

Esercizio 3. [punteggio: 0-3] Determinare un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$Im(f) = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad x_1 - 4x_2 + x_3 = 0 \}; \quad Ker(f) = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

Si determini una matrice $A \in \mathcal{M}at(3 \times 3; \mathbb{R})$ tale che $f = \mathcal{L}_A$.

Esercizio 4. [punteggio: 0-6]
Si consideri la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) Si determinino gli autovalori di A specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.
(ii) Si determinino gli autovettori di A.
(iii) Si dica se A è triangolarizzabile e/o diagonalizzabile.