

Programma svolto di Matematica

Classe 5B, A.S. 2025–2026

Prof. Alessio Del Vigna

1 Limiti di funzione

- (a) Ripasso: calcolo dei limiti mediante l'utilizzo della continuità, dei limiti delle funzioni elementari, del teorema algebrico e del cambio di variabile.
- (b) Forme indeterminate di natura algebrica: casi $+\infty - \infty$, $0/0$, $\pm\infty/\pm\infty$, $0 \cdot (\pm\infty)$ e loro risoluzione.
- (c) Enunciato dei teoremi del confronto (a tre e a due) e prime applicazioni notevoli: limiti per $x \rightarrow +\infty$ delle funzioni $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ e $f(x) = x + \sin x$.
- (d) Enunciato e dimostrazione dei limiti notevoli:
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ (non dimostrato)
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ e $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$,
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$ per ogni $a > 0$ e $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$ per ogni $a > 0$ e $a \neq 1$,
- (e) Confronto fra ordini di infinito (senza dimostrazione): esponenziale/potenza, potenza/logaritmo e applicazione al limite notevole $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$.
- (f) Definizione di limite di una funzione e sua traduzione nei vari casi possibili. Verifica di limiti mediante l'utilizzo della definizione. Continuità delle funzioni elementari e limiti delle funzioni elementari nei punti di accumulazione del dominio non appartenenti al dominio.
- (g) Teorema di unicità del limite (con dimostrazione). Teorema della permanenza del segno (con dimostrazione) e suo “inverso” (con dimostrazione). Dimostrazione dei teoremi del confronto.
- (h) Asintoti del grafico di una funzione: definizione, asintoti verticali, orizzontali e obliqui.

2 Limiti di successioni

- (a) Ripasso sulle successioni: definizione, modi di visualizzare una successione, monotonia, limitatezza.
- (b) Definizione di limite di una successione e calcolo del limite di una successione.
- (c) Somme parziali di una successione e definizione di serie. Serie geometrica $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$ e sua somma nel caso $|q| < 1$. Applicazioni della serie geometrica.

- (d) Teorema ponte funzioni-successioni (senza dimostrazione) e sua applicazione per dimostrare che un limite di funzione non esiste.
- (e) Lunghezza della circonferenza come limite del perimetro del poligono regolare di n lati inscritto. Area del cerchio come limite dell'area del poligono regolare di n lati inscritto.

3 Funzioni continue e loro proprietà

- (a) Definizione di funzione continua in un punto. Discontinuità e singolarità di una funzione e classificazione in prima, seconda e terza specie. Prolungamento continuo di una funzione in un punto in cui ha una singolarità eliminabile.
- (b) Teorema di esistenza degli zeri (con dimostrazione via inf/sup + assurdo). Applicazione del teorema alle equazioni per cui è impossibile determinare le soluzioni in modo esatto.
- (c) Definizione di massimo e minimo globale di una funzione. Teorema di Weierstrass (senza dimostrazione), ottimalità delle ipotesi e non necessità delle ipotesi affinché una funzione abbia massimo e minimo globale.
- (d) Teorema dei valori intermedi (con dimostrazione).

4 Derivata di una funzione

- (a) Rapporto incrementale di una funzione in un punto interno al suo dominio e suo significato geometrico.
- (b) Definizione di funzione derivabile in un punto interno al suo dominio. Derivata prima di una funzione. Definizione di retta tangente al grafico di una funzione in un punto in cui risulta derivabile.
- (c) Continuità delle funzioni derivabili (con dimostrazione). Esempio notevole di funzione continua ma non derivabile in un punto: $f(x) = |x|$ in $x = 0$.
- (d) Derivata prima delle funzioni elementari: potenze $f(x) = x^\alpha$ con α intero positivo (con dimostrazione) e con α reale (senza dimostrazione), esponenziale e logaritmo (con dimostrazione), funzioni seno e coseno (con dimostrazione), funzioni inverse delle funzioni goniometriche (senza dimostrazione).
- (e) Teoremi per la derivabilità della somma, del prodotto e del quoziente di due funzioni (senza dimostrazione).
- (f) Teorema di derivazione della composizione di funzioni (senza dimostrazione).
- (g) Derivata destra e sinistra di una funzione in un punto. Alcune tipologie di punti di non derivabilità: punto angoloso, flesso verticale e cuspidale. Limite da destra e da sinistra della derivata di una funzione in un punto e teorema che, sotto opportune ipotesi, afferma che queste coincidono rispettivamente con derivata destra e sinistra (senza dimostrazione).
- (h) Applicazioni alla fisica:
 - velocità istantanea e accelerazione istantanea come derivata prima e seconda rispetto al tempo della legge oraria del moto di un punto materiale;

- moto di un punto materiale soggetto ad una forza di attrito viscoso proporzionale alla velocità e velocità limite;
- corrente elettrica come derivata rispetto al tempo della carica che scorre in un conduttore.

5 Funzioni derivabili e studio di funzione

- Definizione di massimo e minimo locale di una funzione. Teorema di Fermat (con dimostrazione).
- Teorema di Rolle (con dimostrazione). Teorema di Lagrange (con dimostrazione) e suo corollario per le funzioni che hanno derivata nulla su un intervallo (con dimostrazione). Interpretazione grafica dei due teoremi.
- Teorema che lega la monotonia di una funzione al segno della sua derivata in un intervallo (con dimostrazione).
- Definizione “geometrica” di funzione convessa e di funzione concava su un intervallo, anche illimitato. Definizione di punto di flesso. Teorema che lega la convessità di una funzione al segno della sua derivata seconda in un intervallo (senza dimostrazione).
- Teorema di de l'Hôpital (senza dimostrazione) e sue applicazioni.
- Ricerca dei massimi e minimi globali per una funzione continua definita su un intervallo limitato e chiuso. I punti di massimo e minimo globale o sono di bordo, o sono punti stazionari interni o sono punti di non derivabilità interni (con dimostrazione). Variante del teorema di Weierstrass per l'esistenza del minimo globale per funzioni continue su un intervallo con limiti $+\infty$ agli estremi (con dimostrazione) e sue ulteriori varianti. Problemi di massimo e minimo provenienti dalla geometria analitica, dalla geometria piana e solida e dalla fisica.
- Studio di funzione:
 - dominio naturale;
 - eventuali simmetrie;
 - zeri e segno della funzione;
 - limiti nei punti di accumulazione del dominio e che non vi appartengono;
 - ricerca degli asintoti;
 - zona di continuità;
 - derivabilità e monotonia;
 - convessità e flessi.

Gli esercizi hanno coinvolto le seguenti classi di funzioni: polinomiali, razionali fratte, irrazionali, esponenziali e logaritmiche, goniometriche (solo cenni).

6 Integrali

- Definizione di primitiva di una funzione. Due primitive in un intervallo differiscono per una costante (con dimostrazione). Integrale indefinito di una funzione come insieme di tutte le sue primitive.
- Primitive elementari. Proprietà di linearità dell'integrale (con dimostrazione).

- (c) Integrazione per sostituzione (con dimostrazione):
- $\int f(g(x))g'(x) dx = \left(\int f(t) dt\right)\big|_{t=g(x)}$, caso della sostituzione diretta;
 - $\int f(x) dx = \left(\int f(g(t))g'(t) dt\right)\big|_{t=g^{-1}(x)}$, se g è invertibile, caso della sostituzione inversa.
- (d) Integrazione per parti (con dimostrazione), sue applicazioni classiche e sue applicazioni più avanzate, come il “trucco dell’1 nascosto” e “il grande ritorno”.
- (e) Integrazione delle funzioni razionali: divisione polinomiale per ricondursi ad avere il numeratore di grado inferiore al denominatore; caso di denominatore di primo grado; casi con denominatore di secondo grado; cenni al caso generale.