Liceo Scientifico "A. Vallisneri" – Classe 3SB

Prova scritta di matematica

Nome e cognome: _____

Istruzioni per la consegna

- Presentare con chiarezza la strategia risolutiva adottata, indicando i teoremi e le proprietà utilizzati e motivando ogni passaggio del ragionamento.
- Utilizzare un linguaggio matematico corretto e coerente, rispettando il formalismo e la simbologia propri della disciplina.
- Esporre il procedimento risolutivo in modo ordinato e preciso.

[15 pt] **Esercizio 1.** Risolvere in $\mathbb{R}$ le seguenti equazioni esponenziali:

(a) $\dfrac{\ln(x^3) - 2}{\ln x + 3} = 1$

(b) $\log(-x) + \log(2 + x) = 2\log(-x - 1)$

[15 pt] **Esercizio 2.** Risolvere in $\mathbb{R}$ le seguenti disequazioni esponenziali:

(a) $1 + \log_{\frac{1}{3}}(|x + 1| - 2) \geq 0$

(b) $\dfrac{\ln x - 1}{\ln^2 x - 4} \geq 0$

[20 pt] **Esercizio 3.** Si consideri la funzione f definita da

$$f(x) = 2e^x - 3.$$

(a) Tracciare il grafico di f. Specificare dominio, immagine e asintoti di f.

(b) Dimostrare che la funzione f è invertibile e verificare che l'espressione della sua funzione inversa è $f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x+3}{2}\right)$. Tracciare il grafico di f^{-1}.

(c) Si consideri l'equazione

$$\ln\left(\frac{x+3}{2}\right) + x + 2 = 0$$

Giustificando esaurientemente le risposte, dire se l'equazione ha soluzioni, quante ne ha e esibire, per ciascuna di esse, un intervallo che la contiene.

[10 pt] **Esercizio 4.** Durante uno scavo archeologico sulle coste della Norvegia, viene rinvenuto il relitto di una nave vichinga. Per stabilire l'epoca del naufragio, i ricercatori analizzano un frammento di legno dello scafo utilizzando il metodo del carbonio-14. L'analisi mostra che l'attività radioattiva del frammento di legno (che è proporzionale al numero di atomi di carbonio-14 rimasti nel legno) è pari al 88.5% di quella che si registra in un albero vivo della stessa specie ai giorni nostri, attività che assumiamo sia identica a quella del legno della nave al momento del taglio dell'albero. È noto inoltre che il tempo di dimezzamento del carbonio-14 è $t_{1/2} = 5730$ anni.

(a) Determinare il tempo caratteristico τ del processo di decadimento del carbonio-14.

(b) Determinare l'età del reperto e l'anno stimato del naufragio, considerando che le analisi sono state fatte nel 2026.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4

Voto: _____