

COGNOME:

NOME:

MATR.:

La somma dei punteggi degli esercizi fa **40**.

Il tempo a disposizione è tre ore.

Esercizio 1 Consideriamo la serie di potenze $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+3}$ (definita le x in cui la serie converge).(a) Si trovi il raggio di convergenza R della serie: $R =$ 1

(1 pt.)

(b) Si calcoli esplicitamente $xf'(x) + 3f(x) =$ $\frac{1}{1-x}$

(oppure si scriva "non esiste").

(2 pt.)

(c) Si trovi esplicitamente il valore di f : $f(x) = -\frac{\ln(1-x) + x + \frac{x^2}{2}}{x^3}$

Per questo punto si richiede di mostrare i passaggi principali nello spazio che segue.

(3 pt.)

SvolgimentoDalla relazione $xf' + 3f = \frac{1}{1-x}$ si può dividere per x

e applicare la formula risolutiva per le equazioni di I ordine.

DIRETTAMENTE: moltiplico per x^2 e ottengo:

$$\frac{x^2}{1-x} = x^3 f' + 3x^2 f = \frac{d}{dx}(x^3 f') \Rightarrow x^3 f'(x) = \int \frac{x^2}{1-x} dx =$$

$$\int \left(\frac{x^2-1}{1-x} + \frac{1}{1-x} \right) dx = \int \left(-x-1 + \frac{1}{1-x} \right) dx = -\frac{x^2}{2} + x - \ln(1-x) + C$$

Se prendo $x=0$ ottengo $C=0$. Dunque

$$f(x) = \frac{-\frac{x^2}{2} - x - \ln(1-x)}{x^3} \quad \left(\text{Notiamo che} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \stackrel{(\text{H\`opital})}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x-1 + \frac{1}{1-x}}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{3x^2(1-x)} = \frac{1}{3} \quad (= f(0))$$

Esercizio 2 Si considerino il sottoinsieme D di $\mathbb{R}^3$ e la funzione $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definiti da:

$$D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x \geq 0, z \geq 1\} \quad f(x, y, z) := (x + y)^2 - 2z^2$$

- (a) Si trovino tutti i punti critici vincolati per f su D . Nel caso che le caselle non bastino si usi lo spazio bianco sottostante per indicare tutti i punti. (5 pt.)

$(x, y, z) =$	$(\times, -\times, 1) \quad 0 \leq x \leq \sqrt{\frac{3}{2}}$	$(x, y, z) =$	$(0, 0, 1)$
$(x, y, z) =$	$(\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}, 1)$	$(x, y, z) =$	
$(x, y, z) =$	$(0, \sqrt{3}, 1)$	$(x, y, z) =$	$(0, -\sqrt{3}, 1)$
$(x, y, z) =$		$(x, y, z) =$	

(*) se $x=0$ viene $(0, 0, 1)$, se $x=\sqrt{\frac{3}{2}}$ viene $(\sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{3}{2}}, 1)$

- (b) Si trovino il minimo di f su D e un punto di massimo $(x_{\max}, y_{\max}, z_{\max})$ per f su D :

$\min_{(x,y,z) \in D} f(x, y, z) =$	-8	$(x_{\max}, y_{\max}, z_{\max}) =$	$(\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}, 1)$
-------------------------------------	------	------------------------------------	---

(1 pt.)

Esercizio 3 Si consideri il sottoinsieme D di $\mathbb{R}^3$ definito da:

$$D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x^2 + y^2 + z^2 \leq 5, x^2 + z^2 \geq 1, y \geq 0)\}$$

Diamo per buono che D è un dominio regolare a tratti. Indicheremo con $\hat{\nu}(P)$ la normale unitaria uscente da D , definita per $P \in \partial_{\text{reg}} D$. Consideriamo inoltre il campo $\vec{f}$ definito da:

$$\vec{f}(x, y, z) := 2yz\vec{i} + 3x^2z^2(x^2 + z^2)\vec{j} - 2xy\vec{k}.$$

Indichiamo inoltre

$$S := \partial D \cap \{x^2 + y^2 + z^2 = 5\}, \quad L := \partial D \cap \{x^2 + z^2 = 1\}, \quad B := \partial D \cap \{y = 0\}.$$

È chiaro che $\partial D = S \cup L \cup B$ e che $(S, \hat{\nu})$, $(L, \hat{\nu})$ ed $(B, \hat{\nu})$ sono superfici regolari orientate.

- (a) Se $P_0 = (-1/2, 1, \sqrt{3}/2)$ si trovi l'equazione del piano passante per P_0 e tangente a ∂D in P_0 (oppure si barri "non esiste") – l'equazione deve essere del tipo $ax + by + cz = d$: (1 pt.)

$$\boxed{-1}x + \boxed{0}y + \boxed{\sqrt{3}}z = \boxed{2} \quad \text{non esiste}$$

- (b) Se $Q_0 = (1, 2, 0)$ si trovino i vettori (tutti **presi rispetto alla superficie S**) (oppure si barri "non esiste") : (3 pt.)

$$\begin{aligned} \hat{\nu}_S(Q_0) &= \boxed{\frac{1}{\sqrt{5}}}\vec{i} + \boxed{\frac{2}{\sqrt{5}}}\vec{j} + \boxed{0}\vec{k} \quad \text{non esiste} \\ \hat{n}_S(Q_0) &= \boxed{-\frac{2}{\sqrt{5}}}\vec{i} + \boxed{\frac{1}{\sqrt{5}}}\vec{j} + \boxed{0}\vec{k} \quad \text{non esiste} \\ \hat{t}_S(Q_0) &= \boxed{0}\vec{i} + \boxed{0}\vec{j} + \boxed{1}\vec{k} \quad \text{non esiste} \end{aligned}$$

- (c) Si trovi il bordo della superficie S :

$$\Sigma(S) = \boxed{\{x^2 + z^2 = 1, y = 2\} \cup \{x^2 + z^2 = 5, y = 0\}}$$

- (d) Si trovi un potenziale vettore $\vec{F}$ per il campo $\vec{f}$, oppure si barri **NON ESISTE**: (2 pt.)

$$\vec{F}(x, y, z) = \boxed{x^4z^3 + \frac{3}{5}x^2z^5 + y^2}\vec{i} + \boxed{-yz^2}\vec{j} + \boxed{0}\vec{k}$$

- (e) Si calcolino:

$$\iint_L \vec{f} \cdot \hat{\nu} d\sigma = \boxed{0}, \quad \iint_S \vec{f} \cdot \hat{\nu} d\sigma = \boxed{\frac{117}{2} \pi}.$$

Di questo punto è richiesto lo SVOLGIMENTO da riportare nelle facciate bianche che seguono.

Svolgimento del punto (e).

- Per l'integrale su L notiamo che, se $P = (x, y, z) \in L \Rightarrow$

$$\hat{\nu}(P) = \frac{\nabla h(P)}{|\nabla h(P)|} \quad \text{dove } h(P) = 1 - x^2 - z^2 \Rightarrow$$

$$\hat{\nu}(P) = \begin{pmatrix} -x \\ 0 \\ -z \end{pmatrix}. \quad \text{Allora}$$

$$\vec{f}(P) \cdot \hat{\nu}(P) = (2yz\vec{i} + 3x^2z^2(x^2+z^2)\vec{j} - 2xy\vec{k}) \cdot (-x\vec{i} - z\vec{k}) =$$

$$2xyz - 2xyz = 0$$

$$\Rightarrow \iint_L \vec{f} \cdot \hat{\nu} \, d\sigma = 0$$

- Per il secondo possiamo usare la definizione oppure usare il fatto che $\text{div}(\vec{f}) = 0$ da cui

$$\iint_S \vec{f} \cdot \hat{\nu} \, d\sigma = \underbrace{\iint_{\partial D} \text{div} \vec{f} \, dx dy dz}_{=0} - \underbrace{\iint_L \vec{f} \cdot \hat{\nu} \, d\sigma}_{=0} - \iint_B \vec{f} \cdot d\hat{\nu} \, d\sigma$$

$$\text{Calcoliamo } \iint_B \vec{f} \cdot \hat{\nu} \, d\sigma = - \iint_B \vec{f} \cdot \vec{j} \, d\sigma = \iint_{(1 \leq x^2+z^2 \leq 5)} f_2(x, 0, z) \, dx dz -$$

$$- \iint_{1 \leq x^2+z^2 \leq 5} 3x^2z^2(x^2+z^2) \, dx dz = -3 \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin^2 \theta \, d\theta \int_1^{\sqrt{5}} \rho^7 \, d\rho =$$

$$- \frac{3}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2(2\theta) \, d\theta \left[\frac{\rho^8}{8} \right]_1^{\sqrt{5}} = - \frac{3}{8} \int_0^{2\pi} (1 - \cos(4\theta)) \, d\theta \left(\frac{5^4 - 1}{8} \right)$$

$$- \frac{3}{64} \cdot 2\pi \cdot 624 = - \frac{9 \cdot 39}{2} \pi = - \frac{117}{2} \pi \quad (\Rightarrow \iint_L \vec{f} \cdot \hat{\nu} \, d\sigma = \frac{117}{2} \pi)$$

Esercizio 4 Si consideri la funzione $G: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da:

$$G(x, y, w, z) := \begin{pmatrix} 1 - \sin(x - y + w - z) - e^{3x-2y+w} \\ \cos(x + y + w + z) - e^{2y-w+3z} \end{pmatrix}.$$

(scrivo i punti in arrivo come vettori colonna). Consideriamo inoltre $P_0 := (1, 1, -1, -1)$. È chiaro che $G(P_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(a) Si dica se l'affermazione che segue è vera e si spieghi perché (nelle righe sottostanti).

(3 pt.)

Esiste $\rho > 0$ e una funzione $f: W \rightarrow \mathbb{R}^2$, dove W è un aperto di $\mathbb{R}^2$ e $(1, -1) \in W$, tale che:

$$\left\{ (x, y, w, z) \in \mathbb{R}^4 : G(x, y, w, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \cap B(P_0, \rho) = \{(x, y, w, z) : (x, z) \in W, (y, w) = f(x, z)\}$$

Se calcolo la matrice Jacobiana di G nel punto P_0

otengo $J_G(P_0) = \begin{bmatrix} -4 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$. Per rispondere

al quesito considero $\frac{\partial G}{\partial (y, w)}(P_0) = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ e vedo che

il determinante $-1 \neq 0$. Dunque per il teorema del Dim
esiste $f: W \rightarrow \mathbb{R}^2$, con W in $\mathbb{R}^2$ intorno di $(x_0, z_0) = (1, -1)$

tale che $\{G = (0)\}$ vicino a P_0 è il grafico di f .

INOLTRE (NON È RICHIEDO MA SERVE SOTTO)

$$J_f(1, -1) = -\frac{\partial G}{\partial (y, w)}(P_0)^{-1} \frac{\partial G}{\partial (x, z)} = -\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= -\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}. \text{ Se pongo } K(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} 4\xi - 3\eta \\ 2\xi - 3\eta \end{pmatrix} \Rightarrow h(\xi, \eta) = f \circ K(\xi, \eta)$$

$$\text{e } K(1, 1) = (1, -1) \Rightarrow J_h(1, 1) = J_f(1, -1) J_K(1, 1) = -\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -26 & 27 \\ -46 & 45 \end{bmatrix}$$

(b) Se f è la funzione definita nel punto (a) (ammesso che esista), si ponga $h(\xi, \eta) := f(4\xi - 3\eta, 2\xi - 3\eta)$ per (ξ, η) che variano in un intorno del punto $(1, 1)$.

Si trovi la matrice Jacobiana di h nel punto $(1, 1)$:

(3 pt.)

$$J_h(1, 1) = \begin{pmatrix} -26 & 27 \\ -46 & 45 \end{pmatrix}$$

oppure non esiste.

Esercizio 5 Consideriamo il sistema di equazioni differenziali:

$$(Sys) \quad \begin{cases} x' = y - 3z - 2e^t \\ y' = 2x + y + 3z + e^t \\ z' = -x - y + 2z + 2e^t \end{cases}$$

che si può scrivere in forma vettoriale come

$$Y' = AY + B(t)$$

dove:

$$Y(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}, \quad A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad B(t) := e^t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Si trovino gli autovalori di A e le rispettive molteplicità algebrica e geometrica:

(1 pt.)

$$\begin{array}{lll} \lambda_1 = 2 & m_A(\lambda_1) = 2 & m_G(\lambda_1) = 1; \\ \lambda_2 = -1 & m_A(\lambda_2) = 1 & m_G(\lambda_2) = 1; \\ \lambda_3 = & m_A(\lambda_3) = & m_G(\lambda_3) = \end{array}$$

(non occorre riempire tutte le caselle se gli autovalori sono uno o due).

(b) Si trovi una soluzione particolare $\bar{Y}$ di (Sys)

(2 pt.)

$$\begin{array}{l} \bar{x}(t) = e^t \\ \bar{y}(t) = 0 \\ \bar{z}(t) = -e^t \end{array}$$

(c) Si trovino una matrice di Jordan J e una matrice di cambio di base M per cui $A = M J M^{-1}$:

(3 pt.)

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(d) Si trovi la soluzione $Y(t)$ di (Sys) verificante le condizioni iniziali

$$x(0) = 0, y(0) = 0, z(0) = 0:$$

(3 pt.)

$$x(t) =$$

$$e^t - (t+1)e^{2t}$$

$$y(t) =$$

$$t e^{2t}$$

$$z(t) =$$

$$e^{2t}(t+1) - e^t$$