

COGNOME:

NOME:

MATR.:

La somma dei punteggi degli esercizi fa **40**. Il tempo a disposizione è tre ore.

Esercizio 1 Consideriamo la funzione $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da: $f(x) := \sinh(x)$

(a) Si trovino i coefficienti c_n della serie di Fourier complessa relativa a f

(3 pt.)

$$c_0 = 0, \quad c_n = \frac{(-1)^n \sinh(\pi)}{\pi} \frac{n}{1+n^2} i \quad (n \neq 0).$$

(b) Si dica qual è l'affermazione corretta tra le seguenti:

(1 pt.)

☐ a) La serie di Fourier non converge uniformemente, perché $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| = +\infty$,

☒ b) La serie di Fourier non converge uniformemente, perché $t \mapsto \sinh(y)$ è diversa da zero e dispari,

☐ c) La serie di Fourier converge uniformemente, ☐ d) nessuna delle precedenti.

(c) Usando i punti precedenti si trovi la somma della serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{(1+n^2)^2}$, spiegando il procedimento nello spazio che segue:

(3 pt.)

uso Parseval: $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt = 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} 2 |c_n|^2$ (perché $|c_{-n}| = |c_n|$ e $c_0 = 0$)

Calcolo $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sinh^2(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2} \right)^2 dt = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{e^{2t} + e^{-2t}}{4} - \frac{1}{2} \right) dt =$

$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cosh(2t)}{2} dt - \pi = \left[\frac{1}{4} \sinh(2t) \right]_{-\pi}^{\pi} - \pi = \frac{1}{2} \sinh(2\pi) - \pi = \sinh(\pi) \cosh(\pi) - \pi$

D'altra parte $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 = \frac{\sinh^2(\pi)}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(1+n^2)^2}$ da cui

$\sinh(\pi) \cosh(\pi) - \pi = 4\pi \frac{\sinh^2(\pi)}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(1+n^2)^2} \Leftrightarrow$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(1+n^2)^2} = \frac{\pi}{4} \left(\sinh(\pi) \cosh(\pi) - \pi \right) \frac{1}{\sinh^2(\pi)} =$

$\frac{\pi}{4} \frac{\cosh(\pi)}{\sinh(\pi)} - \frac{\pi^2}{4 \sinh^2(\pi)}$

(a) $f(t) = \sinh(t)$ su $[-\pi, \pi]$. Allora

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sinh(t) e^{-int} dt. \quad \text{Dunque } c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sinh(t) dt = 0 \text{ (dispari)}$$

e se $n \neq 0$

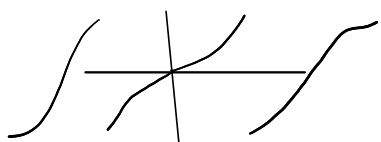
$$2\pi c_n = \int_{-\pi}^{\pi} \sinh(t) e^{-int} dt = \left[\sinh(t) \frac{e^{-int}}{-in} \right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \cosh(t) \frac{e^{-int}}{in} dt =$$

$$\frac{2\sinh(\pi) e^{-in\pi}}{-in} + \left[\cosh(t) \frac{e^{-int}}{in(-in)} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n^2} \int_{-\pi}^{\pi} \sinh(t) e^{-int} dt =$$

$$\frac{2(-1)^n \sinh(\pi) i}{n} + 0 - \frac{2\pi c_n}{n^2} \Rightarrow 2\pi c_n \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{2(-1)^n \sinh(\pi) i}{n}$$

$$\Leftrightarrow c_n = \frac{1}{2\pi} \frac{n}{1+n^2} 2(-1)^n \sinh(\pi) i = \frac{(-1)^n \sinh(\pi)}{\pi} i \frac{n}{1+n^2}$$

(b) è ~~lo~~ perché f periodizzata su $\mathbb{R}$ è discontinua
(nei punti $\pi + 2k\pi$)



$\Rightarrow$ la serie non può convergere uniformemente

Esercizio 2 Si considerino il sottoinsieme D di $\mathbb{R}^2$ e la funzione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiti da:

$$D := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} \leq y \leq x, xy \leq 3\sqrt{3} \right\} \quad f(x, y) := \frac{x}{x^2 + y^2}$$

Diamo per buono che D è un dominio regolare a tratti.

(a) Si scriva la retta tangente a D nel punto $P_0 = (3, \sqrt{3})$:

(1 pt.)

$$\sqrt{3}x + 3y = 6\sqrt{3} \quad / \text{non esiste} \quad \left(\text{ o } x + \sqrt{3}y = 6 \right)$$

(la retta deve essere della forma $ax + by = c$).

(b) Si trovino tutti i punti critici vincolati per f su D (possono essere meno di sei):

(4 pt.)

$$\begin{aligned} (x, y) &= (3, \sqrt{3}) & (x, y) &= & (x, y) &= \\ (x, y) &= (\sqrt[4]{27}, \sqrt[4]{27}) & (x, y) &= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) & (x, y) &= \left(6\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

(c) Si trovino il massimo di f su D e un punto di minimo $(x_{\min}, y_{\min})$ per f su D :

$$\max_{(x, y) \in D} f(x, y) = 1 \quad (x_{\min}, y_{\min}) = (6\sqrt{3}, 1/2)$$

(1 pt.)

(a) $D = \{ g(x, y) \leq 0, h(x, y) \leq 0, k(x, y) \leq 0 \}$ dove

$$g(x, y) = xy - 3\sqrt{3}, \quad h(x, y) = y - x, \quad k(x, y) = \frac{1}{2} - y$$

(per dimostrare che D è regolare e belli bisognerebbe dim. che

$\nabla g \neq 0$ se $g=0$, $\nabla h \neq 0$ se $h=0$, $\nabla k \neq 0$ se $k=0$, ∇g e ∇h sono lin. ind. se $g=h=0$, ∇g e ∇k sono lin. ind. se $g=k=0$, ∇h e ∇k sono lin. ind. se $h=k=0$ e non ci sono punti con $h=k=g=0$)

Vedo che $g(P_0) = 0$, $h(P_0) < 0$, $k(P_0) < 0$. Allora $P_0 \in \partial_{\text{reg}} D$ e la retta tangente è data da $\frac{\partial g}{\partial x}(3)(x-3) + \frac{\partial g}{\partial y}(3)(y-\sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow$

$$\sqrt{3}(x-3) + 3(y-\sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}x + 3y = 6\sqrt{3}$$

(b) Si ha $\nabla f(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \vec{i} - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \vec{j}$

(b.1) $\nabla f = 0 \Rightarrow g < 0, h < 0, k < 0$

$$\begin{aligned} x^2 &= y^2 \\ xy &= 0 \end{aligned} \Rightarrow x=0 \text{ (però } y > \frac{1}{2}) \Rightarrow y^2 = 0 \text{ impossibile}$$

(b.2.1) $\nabla f = \lambda \nabla g \quad g=0, h < 0, k < 0$

$$\begin{cases} \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \lambda \cdot 10 \\ \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} = \lambda x \\ xy = 3\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \cdot x = 3\sqrt{3}\lambda = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} y \Rightarrow \begin{pmatrix} x \neq 0 \text{ per } \lambda \neq 0 \\ xy = 3\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$(y^2 - x^2) = -2y^2 \Leftrightarrow 3y^2 = x^2 \quad (x \geq y \geq \frac{1}{2} > 0)$$

DAUNQUE $3x^2y^2 = x^4 \Rightarrow 3(3\sqrt{3})^2 = x^4 \Leftrightarrow x^4 = 81$

Tanto $\boxed{x = 3 \quad y = \sqrt{3}} \quad (R(3, \sqrt{3}) < 0 \quad K(3, \sqrt{3}) < 0)$

(b.2.2) $\nabla g = \nabla R \quad g < 0 \quad R = 0 \quad K < 0 \quad \nabla R = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = -\lambda \\ \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} = \lambda \\ x = y \end{cases} \Rightarrow \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \quad 0 = 2x^2 \quad x = 0 \quad \text{IMPOSSIBILE}$$

(b.2.3) $\nabla g = \nabla K \quad g < 0 \quad R < 0$

$$\begin{cases} \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0 \\ \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} = \lambda \\ y = 1/2 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2} \quad \text{ma } R(x, y) = 0 \quad \text{quindi non va bene}$$

(E non si possono avere)

(b.3.1) $g = R \quad (\text{E condiz. } \nabla g = \lambda \nabla g + \mu \nabla R \text{ è automatica})$

$$\begin{cases} xy = 3\sqrt{3} \\ x = y \end{cases} \Rightarrow x^2 = 3\sqrt{3} \quad \text{tutto } (3^{3/4}, 3^{3/4}) = (\sqrt[4]{27}, \sqrt[4]{27})$$

(b.3.2) $g = K$

$$\begin{cases} xy = 3\sqrt{3} \\ y = 1/2 \end{cases} \Rightarrow \text{tutto } (6\sqrt{3}, 1/2)$$

(b.3.3) $R = K \quad \text{tutto } (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

(c) $g(3, \sqrt{3}) = \frac{3}{9+3} = \frac{1}{4} = 0,25$

$$g(3^{3/4}, 3^{3/4}) = \frac{3^{3/4}}{3^{3/2} + 3^{3/2}} = \frac{3^{3/4}}{2 \cdot 3^{3/2}} = \frac{1}{2 \cdot 3^{3/4}} = \frac{\sqrt[4]{3}}{6} \approx 0,219$$

$$g(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1/2}{1/4 + 1/4} = \frac{1/2}{1/2} = 1 \quad \text{MAX}$$

$$g(6\sqrt{3}, \frac{1}{2}) = \frac{6\sqrt{3}}{108 + \frac{1}{4}} = \frac{24\sqrt{3}}{433} \approx 0,036 \quad \text{MIN}$$

ES.3 (a) Guadriamo il dominio nel piano (ρ, z) $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$(D = \{ \rho^2 + z^2 \leq 25, z \leq 25 - 7\rho \}) \quad \text{Dove interseca il cerchio } z^2 + \rho^2 = 25$$

con la retta $z = 25 - \rho$.

$$\begin{cases} z^2 + \rho^2 = 25 \\ \rho = \frac{25 - z}{7} \end{cases}$$

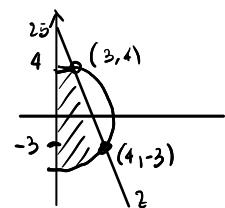
$$z^2 + \left(\frac{25 - z}{7}\right)^2 = 25$$

$$49z^2 + 25^2 - 50z + z^2 = 25 \cdot 49$$

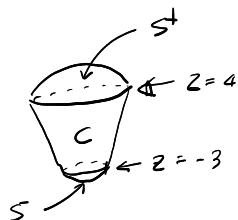
$$50z^2 - 50z + 25^2 - 25 \cdot 49$$

$$2z^2 - 2z + 25 - 49 = 0 \quad z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 48}}{2}$$

$$2z^2 - 2z - 24 = 0 \quad = \frac{1 \pm 7}{2} = \begin{matrix} 4 \\ -3 \end{matrix}$$



$$\Rightarrow z^- = -3 \quad z^+ = 4$$



$$(b) \Sigma(\partial D) = (S^+ \cap S^-) \cup (S^+ \cap C) \cup (S^- \cap C) = \emptyset \cup \{x^2 + y^2 = 9, z = 4\} \cup \{x^2 + y^2 = 16, z = -3\}$$

$$(c) \Sigma^*(S^+) = S^+ \cap S^- \cap C = \emptyset \quad (\text{mentre } \Sigma(S^+) = S^+ \cap C)$$

$$(d) P_0 = (1, 2\sqrt{2}, 4) \rightarrow \text{veredo che } P_0 \in S^+ \cap C$$

Considero $g = x^2 + y^2 + z^2 - 25$ e $h = z - 25 + 7\sqrt{x^2 + y^2}$. g e h sono definiti per D

$$\text{e } g(P_0) = h(P_0) = 0, \quad C = \{h = 0, g \leq 0\}. \quad \nabla g = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \nabla h = \begin{pmatrix} \frac{7x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \frac{7y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\frac{7}{3}x\vec{i} + \frac{7}{3}y\vec{j} + \vec{k}\right). \quad \text{Allora } \|\nabla g\|^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 25 \quad \text{e } \|\nabla h\|^2 = \frac{49}{9}(x^2 + y^2) + 1 = 50$$

$$\hat{\nabla}_{S^+}(P_0) = \frac{1}{5}(\vec{i} + 2\sqrt{2}\vec{j} + 4\vec{k}) \quad \hat{\nabla}_C(P_0) = \frac{1}{5\sqrt{2}}\left(\frac{7}{3}\vec{i} + \frac{14}{3}\sqrt{2}\vec{j} + \vec{k}\right)$$

$$\text{Allora } \hat{\nabla}_C(P_0) \cdot \hat{\nabla}_{S^+}(P_0) = \frac{1}{25\sqrt{2}}\left(\frac{7}{3} + \frac{14}{3} \cdot 4 + 4\right) = \frac{1}{25\sqrt{2}}\left(\frac{7 + 7 \cdot 8}{3} + 4\right) = \frac{1}{25\sqrt{2}}(7 \cdot 3 + 4) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Deve essere } \hat{n}_C(P_0) = \lambda \hat{\nabla}_C(P_0) + \mu \hat{\nabla}_{S^+}(P_0). \quad \text{Si ha:}$$

$$0 = \hat{n}_C \cdot \hat{\nabla}_C = \lambda + \frac{1}{\sqrt{2}}\mu \Rightarrow \mu = -\sqrt{2}\lambda$$

$$1 = \|\hat{n}_C\|^2 = \lambda^2 + 2\lambda\mu\frac{1}{\sqrt{2}} + \mu^2 = \lambda^2(1 - 2 + 2) = \lambda^2 \Rightarrow$$

$$\lambda = 1 \quad \mu = -\sqrt{2}$$

Allora

$$\hat{n}_C(P_0) = \frac{\sqrt{2}}{10} \begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ \frac{14}{3}\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\sqrt{2}}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2\sqrt{2} \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{10} \begin{pmatrix} \frac{7}{3} - 2 \\ (\frac{14}{3} - 4)\sqrt{2} \\ 1 - 8 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{10} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3}\sqrt{2} \\ -7 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{30} \begin{pmatrix} 1 \\ 2\sqrt{2} \\ -21 \end{pmatrix}$$

Imfine

$$\hat{t}_C(P_0) = \hat{\nabla}_C(P_0) \otimes \hat{n}_C(P_0) = \frac{\sqrt{2}}{10} \frac{\sqrt{2}}{30} \begin{vmatrix} \vec{i} & \frac{7}{3} & 1 \\ \vec{j} & \frac{14}{3}\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ \vec{k} & 1 & -21 \end{vmatrix} = \frac{1}{150} \begin{pmatrix} -\frac{14}{3} \cdot 21\sqrt{2} - 2\sqrt{2} \\ -\frac{7}{3}(-21) + 1 \\ \frac{7}{3} \cdot 2\sqrt{2} - \frac{14}{3}\sqrt{2} \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{150} \begin{pmatrix} -100\sqrt{2} \\ 50 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3 Si consideri il sottoinsieme D di $\mathbb{R}^3$ definito da:

$$D := \left\{ (x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 25, z \leq 25 - 7\sqrt{x^2 + y^2} \right\}.$$

Diamo per buono che D è un dominio regolare a tratti e indichiamo con $\hat{\nu}$ la normale unitaria alla frontiera ∂D , uscente da D . Diamo anche per buono che $\partial D = S^+ \cup C \cup S^-$ dove

$$S^+ := \{x^2 + y^2 + z^2 = 25, z \geq z^+\}, \quad S^- = \{x^2 + y^2 + z^2 = 25, z \leq z^-\},$$

$$C := \{(25 - z)^2 = 49(x^2 + y^2), z^- \leq z \leq z^+\}.$$

per due opportuni numeri z^- e z^+ .

(a) Si trovino z^+ e z^- :

(1 pt.)

$z^- =$

-3

$z^+ =$

4

(b) Si ha $\Sigma^*(\partial D) =$

(2 pt.)

$$\{x^2 + y^2 = 9, z = 4\} \cup \{x^2 + y^2 = 16, z = -3\}$$

(c) Si ha $\Sigma^*(S^+) =$

(1 pt.)

$\emptyset$

(e) Se $P = (1, 2\sqrt{2}, 4)$ si trovino i vettori $\hat{\nu}_C(P)$, $\hat{n}_C(P)$ e $\hat{t}_C(P)$ o si barri “non esistono”:

(3 pt.)

$\hat{\nu}_C(P) =$

$$\frac{7\sqrt{2}}{30}$$

$\vec{i} +$

$$\frac{14}{15}$$

$\vec{j} +$

$$\frac{\sqrt{2}}{10}$$

$\vec{k}$

$\hat{n}_C(P) =$

$$\frac{\sqrt{2}}{30}$$

$\vec{i} +$

$$\frac{2}{15}$$

$\vec{j} +$

$$-\frac{7}{10}\sqrt{2}$$

$\vec{k}$

$\hat{t}_C(P) =$

$$-\frac{2}{3}\sqrt{2}$$

$\vec{i} +$

$$\frac{1}{3}$$

$\vec{j} +$

$$0$$

$\vec{k}$

NON ESISTONO

(d) Si calcolino i seguenti integrali di superficie:

(6 pt.)

$$\iint_{S^+} z^2 (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \cdot \hat{\nu} d\sigma =$$

$$\frac{3050}{3}\pi$$

$$\iint_C d\sigma =$$

$$35\sqrt{2}\pi$$

riportando i calcoli nelle facciate bianche che seguono (la valutazione terrà conto dello svolgimento).

Svolgimento

• Parametrizzo S^+ come sopra: $\Gamma(u, v) = (u, v, \sqrt{25-u^2-v^2})$.

Per $(u, v) \in W = \{u^2 + v^2 \leq 9\} \Rightarrow$

$$\vec{N}_\Gamma(u, v) = \frac{u}{\sqrt{25-u^2-v^2}} \vec{i} + \frac{v}{\sqrt{25-u^2-v^2}} \vec{j} + \vec{k} \quad \leftarrow \text{PUNTA "VERSO FUORI" È CONCORDE CON } \hat{\nu}_{S^+}$$

$$\Rightarrow \iint_{S^+} \vec{g} \cdot \hat{\nu} \, d\sigma = \iint_W \vec{g}(\Gamma(u, v)) \cdot \vec{N}_\Gamma(u, v) \, du \, dv =$$

$$\iint_W (25-u^2-v^2) \left(u, v, \sqrt{25-u^2-v^2} \right) \cdot \frac{(u, v, \sqrt{25-u^2-v^2})}{\sqrt{25-u^2-v^2}} \, du \, dv =$$

$$\iint_W \sqrt{25-u^2-v^2} (u^2 + v^2 + 25 - u^2 - v^2) \, du \, dv = 25 \iint_W \sqrt{25-u^2-v^2} \, du \, dv$$

$$= 25 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 \sqrt{25-\rho^2} \, \rho \, d\rho = 50\pi \int_0^3 \sqrt{25-\rho^2} \, \rho \, d\rho = 25\pi \int_0^3 \sqrt{25-s} \, ds = 25\pi \left[-\frac{(25-s)^{3/2}}{3/2} \right]_0^3 =$$

$$\frac{50}{3} \pi \left((25)^{3/2} - (16)^{3/2} \right) = \frac{50}{3} \pi (125 - 64) = \frac{50 \cdot 61}{3} \pi = \frac{3050}{3} \pi$$

• Parametrizzo $C = \{z = 25 - 7\sqrt{49-u^2} \mid -3 \leq z \leq 4\}$

$$\Gamma(\theta, z) = \left(\frac{25-z}{7} \cos \theta, \frac{25-z}{7} \sin \theta, z \right) \quad \text{per } \theta \in [0, 2\pi], -3 \leq z \leq 4$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \theta} = -\frac{25-z}{7} \sin \theta \vec{i} + \frac{25-z}{7} \cos \theta \vec{j} \quad \Rightarrow \vec{N}(\theta, z) = \frac{25-z}{49} \begin{vmatrix} \vec{i} & -\sin \theta & -\cos \theta \\ \vec{j} & \cos \theta & -\sin \theta \\ \vec{k} & 0 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial z} = -\frac{1}{7} \cos \theta \vec{i} - \frac{1}{7} \sin \theta \vec{j} + \vec{k}$$

$$= \frac{25-z}{49} \begin{pmatrix} 7 \cos \theta \\ 7 \sin \theta \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\vec{N}_\Gamma(\theta, z)\| = \frac{25-z}{49} \sqrt{49+1} = \frac{\sqrt{50}}{49} (25-z)$$

A also $\iint_C d\sigma = \iint_{\substack{0 \leq \theta \leq 2\pi \\ -3 \leq z \leq 4}} \frac{\sqrt{50}}{49} (25 - z) d\theta dz = \frac{2\pi\sqrt{50}}{49} \int_{-3}^4 (25 - z) dz =$

$$\frac{2\pi\sqrt{50}}{49} \left[25z - \frac{z^2}{2} \right]_{-3}^4 = \frac{2\pi\sqrt{50}}{49} \left(25 \cdot 4 + 25 \cdot 3 - \frac{1}{2} (4^2 - 3^2) \right) =$$

$$\frac{2\pi\sqrt{50}}{49} \left(25 \cdot 7 - \frac{7}{2} \right) = \frac{2\pi\sqrt{50}}{7} \left(\frac{50 - 1}{2} \right) = \frac{\pi\sqrt{50}}{7} 49 = 7\sqrt{50}\pi = 7 \cdot 5 \cdot \sqrt{2}\pi$$

Esercizio 4 Si consideri la funzione $G: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da:

$$G(x, y, w, z) := \begin{pmatrix} \cos(x + y + w + z) - e^{2x-y+3w} \\ 1 + \sin(x - y + w - z) - e^{-2x+y+3z} \end{pmatrix}.$$

(scrivo i punti in arrivo come vettori colonna). Consideriamo inoltre $P_0 := (1, -1, -1, 1)$. È chiaro che $G(P_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(a) Si dica se l'affermazione che segue è vera e si spieghi perché (nelle righe sottostanti).

(3 pt.)

Esiste $\rho > 0$ e una funzione $f: W \rightarrow \mathbb{R}^2$, dove W è un aperto di $\mathbb{R}^2$ e $(-1, 1) \in W$, tale che:

$$\left\{ (x, y, w, z) \in \mathbb{R}^4 : G(x, y, w, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \cap B(P_0, \rho) = \{ (x, y, w, z) : (w, z) \in W, (x, y) = f(w, z) \}$$

G è sicuramente C^1 su $\mathbb{R}^4$. Si ha

$$J_G(x, y, w, z) = \begin{bmatrix} -\sin(x+y+w+z) [1, 1, 1, 1] - e^{2x-y+3w} [2, -1, 3, 0] \\ \cos(x-y+w-z) [1, -1, 1, -1] - e^{-2x+y+3z} [-2, 1, 0, 3] \end{bmatrix}$$

$$J_G(1, -1, -1, 1) = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & -4 \end{bmatrix} \quad \left(\begin{array}{l} \text{perché } x+y+w+z = 2x-y+3w = \\ x-y+w-z = -2x+y+3z = 0 \text{ in } (1, -1, -1, 1) \end{array} \right)$$

$$\text{Si ha } \det \frac{\partial G}{\partial (x, y)} = \det \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = 4 - 3 = 1 \neq 0. \text{ Posso usare l'implicit function theorem}$$

per esprimere (x, y) in funzione di (w, z)

quello segue non era richiesto. Se $(x, y) = g(w, z)$ do che $(w, z) = (-1, 1)$

$$J_g(w, z) = - \left(\frac{\partial G}{\partial (x, y)}(g(w, z), w, z) \right)^{-1} \left(\frac{\partial G}{\partial (w, z)}(g(w, z), w, z) \right) \Rightarrow$$

$$J_g(-1, 1) = - \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ -7 & -8 \end{bmatrix}$$

(b) Se f è la funzione definita nel punto (a) (ammesso che esista), si ponga $h(\xi, \eta) := f(\xi + \eta, \xi - \eta)$ per (ξ, η) che variano in un intorno del punto $(0, 1)$.

Si trovi la matrice Jacobiana di h nel punto $(0, 1)$:

(3 pt.)

$$J_h(0, 1) = \begin{pmatrix} \boxed{-9} & \boxed{-1} \\ \boxed{-15} & \boxed{1} \end{pmatrix} \quad \text{oppure } \boxed{\text{non esiste}}.$$

$$\text{Poniamo } L(\xi, \eta) = (\xi + \eta, \xi - \eta)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}. \text{ Allora } h = f \circ L \Rightarrow J_h = J_g \circ L \cdot J_L = (J_g \circ L) \cdot L \quad (L \text{ è lineare}). \text{ Per questo}$$

$$\text{ovvero } J_h(0, 1) = J_g(L(0, 1)) \cdot L = J_g(-1, 1) L = - \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 15 & -1 \end{bmatrix}$$

Esercizio 5 Consideriamo il sistema di equazioni differenziali:

(Sys)
$$\begin{cases} x' = 3x + 2y - 5t \\ y' = -2x - y + 4t \\ z' = x + y + z - 3t \end{cases}$$

che si può scrivere in forma vettoriale come

$$Y' = AY + B(t)$$

dove:

$$Y(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}, \quad A := \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B(t) := t \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

(a) Si trovi una soluzione $\bar{Y}$ di (Sys).

(2 pt.)

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) &= 1 + 3t \\ \bar{y}(t) &= -2t \\ \bar{z}(t) &= 1 + 2t \end{aligned}$$

(b) Si trovino una matrice di Jordan J e una matrice di cambio di base M per cui $A = M J M^{-1}$:

(3 pt.)

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Si trovi la soluzione $Y(t)$ di (Sys) verificante la condizione iniziale nulla: $x(0) = 0, y(0) = 0, z(0) = 0$:

(3 pt.)

$$\begin{aligned} x(t) &= 1 + 3t - e^t(2t + 1) \\ y(t) &= -2t + 2te^t \\ z(t) &= 1 + 2t - e^t(t + 1) \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B(t) = t \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = t \vec{v} \quad \text{dove } \vec{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

(a) Cerco $\bar{Y}(t)$ della forma $\bar{Y}(t) = \vec{w}_0 + t \vec{w}_1$. Allora

$$\bar{Y}' - A\bar{Y} - B(t) = \vec{w}_1 - A\vec{w}_0 - tA\vec{w}_1 - t\vec{v} = 0, \text{ che deve fare zero. Ne segue}$$

$$\vec{w}_1 = A\vec{w}_0 \quad \text{e} \quad A\vec{w}_1 = -\vec{v} \Leftrightarrow \vec{w}_1 = -A^{-1}\vec{v} \quad \text{e} \quad \vec{w}_0 = A^{-1}\vec{w}_1. \text{ Si ha}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{se non voglio calcolare } A^{-1} \text{ risolvo a mano: due sistemi})$$

$$\vec{w}_1 = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5+8 \\ 10-12 \\ -5+4+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_0 = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+4 \\ 6-6 \\ -3+2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{dunque } \bar{Y}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(b) \text{ Si ha } p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 0 \\ -2 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)((\lambda-3)(\lambda+1)+4) =$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda+1) = (1-\lambda)^3 \Rightarrow \text{autovalore } \lambda = 1 \text{ con } \boxed{m_A(\lambda) = 3}$$

$$\text{Poniamo } B = A - I = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{ha rango 2} \Rightarrow \boxed{m_B(\lambda) = 2}$$

Cerco e_2 con $Be_2 \neq 0$. Prendo con $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (guardando B $\bar{Y}$...);

vedo che $e_1 = Be_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. A questo punto cerco $e_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ con

$Be_3 = 0$ e e_1, e_3 lin. ind. La condizione $Be_3 = 0 \Leftrightarrow x+y=0$. Posso prendere

$e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ che è lin. ind. da e_1 . Dunque se

$$M = [e_1 | e_2 | e_3] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A = M J M^{-1}$$

$$(c) \text{ Cerco } Y = \bar{Y} + Y_0 \text{ con } Y_0' = AY_0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = Y'(0) = \bar{Y}'(0) + \bar{Y}_0'(0) \Rightarrow \bar{Y}_0'(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -e_2$$

Per la formula di risoluzione:

$$Y_0(t) = e^{tA} Y_0(0) = -M e^{tJ} M^{-1} e_2 = -M e^{tJ} \hat{e}_2 = -M \begin{bmatrix} e^t & t e^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$-e^t \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -e^t \begin{pmatrix} 2t+1 \\ -2t \\ t+1 \end{pmatrix}$$