COGNOME:	
NOME:	
MATR.:	

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compitino del 21 novembre 2020 - PARTE A[1]

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compitino del 21 novembre 2020

1. **Domanda 1.(4p.)**

   Sia $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definita da $f(x, y) := 2(1 + 2x + y)e^{1+2xy}$. Consideriamo il polinomio di grado tre per f nel punto $P_0 = (-1, 1)$; Questo polinomio si può scrivere:

$$P_3 \quad P_{4,P_0}(x, y) = c_{0,0} + c_{1,0}(x + 1) + c_{0,1}(y - 1) + c_{2,0}(x + 1)^2 + c_{1,1}(x + 1)(y - 1) + c_{0,2}(y - 1)^2 + c_{3,0}(x + 1)^3 + c_{2,1}(x + 1)^2(y - 1) + c_{1,2}(x + 1)(y - 1)^2 + c_{0,3}(y - 1)^3$$

   Si trovi $c_{1,1}$

   $\boxed{-4/e \quad \checkmark}$

   Si trovi $c_{2,1}$

   $\boxed{-4/e \quad \checkmark}$

   Si trovi $c_{1,2}$

   $\boxed{4/e \quad \checkmark}$

   Si trovi $\dfrac{\partial^3 f(-1, 1)}{\partial x^3}$

   $\boxed{48/e \quad \checkmark}$

   Si trovi $\dfrac{\partial^3 f(-1, 1)}{\partial x \partial y^2}$

   $\boxed{8/e \quad \checkmark}$

Pongo $x = -1 + \Delta x \quad y = 1 + \Delta y \quad \Rightarrow$

$f(x,y) = 2(2\Delta x + \Delta y)e^{-1} e^{2\Delta x - 2\Delta y + 2\Delta x \Delta y}$

$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2) \Rightarrow$

$f(x,y) = \frac{2}{e}(2\Delta x + \Delta y)\left(1 + 2\Delta x - 2\Delta y + 2\Delta x y + \frac{1}{2}(2\Delta x - 2\Delta y + 2\Delta x \Delta y)^2 + o\left((2\Delta x - 2\Delta y + 2\Delta x\Delta y)^2\right)\right) =$

$\frac{2}{e}(2\Delta x + \Delta y)\left(1 + 2\Delta x - 2\Delta y + 2\Delta x\Delta y + \frac{1}{2}(4\Delta x^2 + 4\Delta y^2 - 8\Delta x\Delta y + o(\|\Delta x, \Delta y\|^2)) + o(\|\Delta x, \Delta y\|^2)\right) =$

$\frac{2}{e}(2\Delta x + \Delta y)(1 + 2\Delta x - 2\Delta y + 2\Delta x^2 + 2\Delta y^2 - 2\Delta x\Delta y + o(\|\cdot\|^2))$

$= \frac{1}{e}\Big(4\Delta x + 2\Delta y + 8\Delta x^2 \boxed{-4\Delta x\Delta y} - 4\Delta y^2 + 8\Delta x^3 \boxed{-4\Delta x^2\Delta y} + \boxed{4\Delta x\Delta y^2} + 4\Delta y^3 + o(\|\Delta x, \Delta y\|^3)\Big)$

$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(P_0) = 6c_{3,0} = 6 \cdot \frac{8}{e} = \frac{48}{e}$; $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(P_0) = 2 \cdot c_{1,2} = 2 \cdot \frac{4}{e} = \frac{8}{e}$

2. **Domanda 2. (2p.)**

   Sia $f = (f_1, f_2) : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ una funzione differenziabile tali che

$$f(0, 0) = (-1, 2) \qquad \frac{\partial f_1}{\partial x}(0, 0) = 3, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(0, 0) = 2, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x}(0, 0) = -2, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y}(0, 0) = 5,$$

   Sia inoltre $h(x, y)$ definita da $h(x, y) := f_1(x, y)^2 - f_2(x, y)^2$.

   Si trovi $\dfrac{\partial h}{\partial x}(0, 0)=$

   $\boxed{2 \quad \checkmark}$

   Si trovi $\dfrac{\partial h}{\partial y}(0, 0)$.

   $\boxed{-24 \quad \checkmark}$

3. **Domanda 3. (4p.)**

   Siano:

$$A := \{(x, y) : 0 \le xy \le 1, 0 \le x\} \quad , \quad B := \{(x, y) : 0 < xy < 1, 0 \le x\}.$$

   Allora (1p. a risposta):

   A è limitato

[1] Tempo: 1/2 ora per la parte A, 1 ora per la parte B

SI
NO ✓

A è chiuso

SI
NO ✓

Il punto $(0,1)$ è

interno ad A
di frontiera per A ✓
esterno ad A

B è aperto

SI ✓
NO

4. **Domanda 4 (4p.)**

Consideriamo una matrice 4×4 A e le sue sottomatrici A_1, A_2 e A_3 come segue:

$$A := \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{1,4} & a_{2,4} & a_{3,4} & a_{4,4} \end{pmatrix} \;,\; A_3 := \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & a_{3,3} \end{pmatrix} \;,\; A_2 := \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{1,2} & a_{2,2} \end{pmatrix} \;,\; A_1 := \begin{pmatrix} a_{1,1} \end{pmatrix}$$

Con queste notazioni si scriva cosa chiede il criterio di Sylvester per avere che (a) A è definita strettamente positiva; (b) A è definita strettamente negativa.

5. **Domanda 5. (4p.)**

Sia $\gamma : [0,\pi] \to \mathbf{R}^3$ definita da:

$$\gamma(t) = (\sin(t), \cos(t), -2t) = \sin(t)\vec{\mathbf{i}} + \cos(t)\vec{\mathbf{j}} - 2t\vec{\mathbf{k}}.$$

Allora:

γ è una curva chiusa

SI
NO ✓

$\gamma'(t)$ ha modulo costante

SI ✓
NO

$\gamma(t)$ è ortogonale a $\gamma'(t)$

SI
NO ✓

Si trovi la lunghezza di γ: $\ell(\gamma) =$

sqrt(5)Pi ✓

6. **Domanda 6. (4p.)**

Sia $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ una forma quadratica. Indichiamo:

$$B := \{x \in \mathbb{R}^N \ : \ \|x\| \leq 1\} \qquad , \qquad S := \{x \in \mathbb{R}^N \ : \ \|x\| = 1\}.$$

Allora:

(A) φ è definita strettamente positiva se e solo se $\min_{x \in S} \varphi(x) > 0$

SI ✓
NO

(B) φ è definita strettamente positiva se e solo se $\min_{x\in B} \varphi(x) > 0$

SI
NO ✓

(C) φ è definita positiva se e solo se $\min_{x\in S} \varphi(x) \geq 0$

SI ✓
NO

(D) φ è definita strettamente positiva se e solo se $\min_{x\in B} \varphi(x) \geq 0$

SI ✓
NO

7. **Domanda 7. (8p.)**

   Si consideri la funzione di due variabili $f(x, y) := -9x^3 + y^4 + 24xy$.

   (A) Si dica quanti punti stazionari ha f $\boxed{2 \quad ✓}$

   (B) Si dica quanti sono, tra i punti critici, quelli di massimo relativo $\boxed{0 \quad ✓}$

   (C) Si dica quanti sono, tra i punti critici, quelli di minimo relativo $\boxed{1 \quad ✓}$

   (D) Si dica quanti sono, tra i punti critici, quelli di sella $\boxed{1 \quad ✓}$

   (E) Si dica se f ha massimo su $\mathbb{R}^2$

SÌ
NO ✓

   (F) Si dica se f ha minimo su $\mathbb{R}^2$

SÌ
NO ✓

   (G) Si motivi le due precedenti risposte, indicando eventualmente quali argomenti di teoria si sono usati (non sono richiesti calcoli). Si scrivano anche il valore massimo (se esiste) e il valore minimo di f (sempre se esiste) (2p.).

8. **Domanda 8 (4p.)**

   Si consideri la funzione $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definita da

$$f(x, y) := \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{5x^2 + 3y^4} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

   (A) Si dica se f è continua

SÌ ✓
NO

   (B) Si individui la risposta corretta:

$f'(0,0)(\vec{v})$ non esiste per nessun vettore $\vec{v}$
$f'(0,0)(\vec{v})$ esiste per alcuni $\vec{v}$, ma non per tutti
$f'(0,0)(\vec{v})$ esiste per tutti i vettori $\vec{v}$, ma non è lineare in v
$f'(0,0)(\vec{v})$ esiste per tutti i vettori $\vec{v}$ ed è lineare in $\vec{v}$

   (C) La funzione f è differenziabile in $(0, 0)$

Sì
No ✓

   (D) Si spieghi come si è giunti alla conclusione indicata nel punto precedente.