

ELEMENTI DI MATEMATICA E STATISTICA

CLAUDIO BONANNO

INDICE

1. Notazioni	2
Parte 1. Algebra lineare	2
2. Insiemi numerici	2
3. Spazi vettoriali	4
4. Equazioni e sistemi lineari omogenei	9
5. Dimensione e base di uno spazio vettoriale	10
6. Somma e intersezione di sottospazi vettoriali	13
7. Sistemi lineari e algoritmo di Gauss–Jordan	15
8. Applicazioni lineari	21
9. Determinante di una matrice quadrata	24
10. Sottospazi affini e struttura delle soluzioni	26
11. Approfondimenti sulle matrici	31
12. Esempi conclusivi	33
Parte 2. Analisi matematica	36
13. Cardinalità degli insiemi numerici	36

1. NOTAZIONI

- $\in$ significa “appartiene a”, $\notin$ significa “non appartiene a”;
- $\forall$ significa “per ogni”;
- $\exists$ significa “esiste (almeno)”;
- $\nexists$ significa “non esiste”;
- $\exists!$ significa “esiste unico”;
- $: o\ t.c.$ significa “tale che”;
- $\Rightarrow$ significa “implica che”;
- $\Leftrightarrow$ significa “se e solo se” o “è equivalente a”

Parte 1. Algebra lineare

2. INSIEMI NUMERICI

Indichiamo con $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ l'insieme dei *numeri naturali*, e con $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ l'insieme dei numeri naturali a cui abbiamo aggiunto lo 0.

Proprietà di $\mathbb{N}_0$ rispetto all'operazione somma $+$. I numeri naturali è un insieme chiuso rispetto a $+$, ossia se $n, m \in \mathbb{N}$ allora $n + m \in \mathbb{N}$. Valgono le seguenti proprietà:

- esiste l'elemento neutro 0 (per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha $n + 0 = n$);
- vale la proprietà associativa (per ogni $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$, si ha $n_1 + (n_2 + n_3) = (n_1 + n_2) + n_3$).

Non esiste però in generale l'elemento inverso di ogni $n \in \mathbb{N}$, ossia un $m \in \mathbb{N}$ tale che $m + n = 0$.

Per questo motivo, consideriamo $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$, l'insieme dei *numeri interi*.

Proprietà di $\mathbb{Z}$ rispetto all'operazione somma $+$. $\mathbb{Z}$ è un insieme chiuso rispetto a $+$. Inoltre, valgono le seguenti proprietà:

- esiste l'elemento neutro 0;
- vale la proprietà associativa;
- esiste l'elemento inverso (per ogni $n \in \mathbb{Z}$ esiste $-n \in \mathbb{Z}$ tale che $n + (-n) = 0$);
- vale la proprietà commutativa (per ogni $n, m \in \mathbb{Z}$, si ha $n + m = m + n$).

Un insieme numerico con le proprietà (i), (ii) e (iii) rispetto ad un'operazione binaria si chiama *gruppo*. Se vale anche la (iv), si chiama *gruppo commutativo*. Pertanto $(\mathbb{Z}, +)$ è un gruppo commutativo.

Consideriamo ora l'operazione di prodotto $\cdot$. $\mathbb{Z}$ è un insieme chiuso anche rispetto a $\cdot$. Inoltre, per $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ si ha:

- esiste l'elemento neutro 1 per $\cdot$ (per ogni $n \in \mathbb{Z}$, si ha $n \cdot 1 = n$);
- vale la proprietà associativa del prodotto (per ogni $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}$, si ha $n_1 \cdot (n_2 \cdot n_3) = (n_1 \cdot n_2) \cdot n_3$);
- vale la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma (per ogni $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}$, si ha $n_1 \cdot (n_2 + n_3) = n_1 \cdot n_2 + n_1 \cdot n_3$).

Non esiste però in generale l'elemento inverso rispetto al prodotto. Dato $n \in \mathbb{Z}$, non esiste necessariamente $m \in \mathbb{Z}$ tale che $n \cdot m = 1$.

Per questo motivo, consideriamo $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$, l'insieme dei *numeri razionali*. Proprietà di $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$. $\mathbb{Q}$ è un insieme chiuso rispetto a $+$ e $\cdot$. Inoltre, valgono le proprietà da (i) a (vii), e in più

- esiste l'elemento inverso rispetto al prodotto (per ogni $p/q \in \mathbb{Q}$ con $p \neq 0$, esiste $q/p \in \mathbb{Q}$ tale $\frac{p}{q} \cdot \frac{q}{p} = +1$).
- vale la proprietà commutativa per il prodotto.

Pertanto $\mathbb{Q}$ è un gruppo commutativo rispetto alla somma.

Inoltre, un insieme numerico con le proprietà da (i) a (ix) rispetto a due operazioni binarie $+$ e $\cdot$ si chiama *campo*. Pertanto $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ è un campo.

Infine, osserviamo che rappresentando i numeri razionali su una retta, resterebbero dei “buchi”, come ad esempio le radici del polinomio a coefficienti interi $x^2 - 2$. Mostriamo infatti che

Proposizione 2.1. $\sqrt{2}$ non è un numero razionale.

Dimostrazione. Procediamo per assurdo, ossia supponiamo che $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, e ne ricaviamo qualcosa di assurdo.

Se $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, esistono $p, q \in \mathbb{N}$ tali che

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \quad \text{e} \quad \text{MCD}(p, q) = 1.$$

Da

$$(\sqrt{2})^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2$$

segue

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \quad \Longleftrightarrow \quad 2q^2 = p^2.$$

Pertanto p è pari. Possiamo dunque scrivere $p = 2p'$ con $p' \in \mathbb{N}$. Ne segue

$$2q^2 = (2p')^2 \quad \Longleftrightarrow \quad 2q^2 = 4(p')^2 \quad \Longleftrightarrow \quad q^2 = 2(p')^2.$$

Quindi anche q è pari, in contraddizione con $\text{MCD}(p, q) = 1$. Abbiamo ottenuto un assurdo. $\square$

Riempendo i “buchi” sulla retta lasciati da $\mathbb{Q}$, troviamo l’insieme $\mathbb{R}$ dei *numeri reali*, che è un campo rispetto alle operazioni $+$ e $\cdot$.

Abbiamo quindi costruito la seguente gerarchia di insiemi numerici

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{N}_0 \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}.$$

Passiamo adesso alla costruzione dei prodotti cartesiani $\mathbb{R}^n$ con $n \in \mathbb{N}$.

Definizione 2.2 (Prodotto cartesiano). Siano A e B due insiemi. Il loro *prodotto cartesiano* è

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

In particolare,

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\},$$

e analogamente si definiscono

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\},$$

e $\mathbb{R}^n$ con $n \in \mathbb{N}$.

Consideriamo $\mathbb{R}^2$ con l’operazione di somma. Dati $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Valgono inoltre:

- l’esistenza dell’elemento neutro $(0, 0)$;
- la proprietà associativa;
- l’esistenza dell’elemento inverso rispetto alla somma:

$$(x, y) + (-x, -y) = (0, 0);$$

- la proprietà commutativa.

Pertanto $(\mathbb{R}^2, +)$ e in generale $(\mathbb{R}^n, +)$ sono gruppi commutativi.

Partendo da $\mathbb{R}^2$ possiamo definire l'insieme $\mathbb{C}$ dei *numeri complessi*. Introduciamo un simbolo i , che rappresenta un numero con la proprietà che $i^2 = -1$. Allora, un numero complesso è un numero della forma

$$z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Possiamo pensare alla seguente identificazione

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \iff x + iy \in \mathbb{C}.$$

Su $\mathbb{C}$ possiamo anche introdurre il seguente prodotto

$$\begin{aligned} (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) &= x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2 \\ &= x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + y_1x_2). \end{aligned}$$

In termini di coppie, esso è quindi definito da

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2).$$

Con le operazioni di somma e prodotto appena definite, $\mathbb{C}$ è un campo. Infatti, $\mathbb{C}$ (o $\mathbb{R}^2$) è un gruppo commutativo rispetto a $+$, inoltre

- l'elemento neutro del prodotto è $(1, 0)$, poiché

$$(x, y) \cdot (1, 0) = (x \cdot 1 - y \cdot 0, x \cdot 0 + y \cdot 1) = (x, y);$$

- valgono le proprietà (vi) e (vii), associativa e distributiva;
- l'inverso di $(x, y) \neq (0, 0)$ è

$$\left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2} \right),$$

poiché

$$\begin{aligned} (x, y) \cdot \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2} \right) &= \left(x \frac{x}{x^2 + y^2} - y \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} \right), x \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} \right) + y \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \\ &= (1, 0); \end{aligned}$$

- vale la proprietà commutativa per il prodotto.

3. SPAZI VETTORIALI

Un primo esempio è

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ volte}} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R} \forall i = 1, \dots, n\}.$$

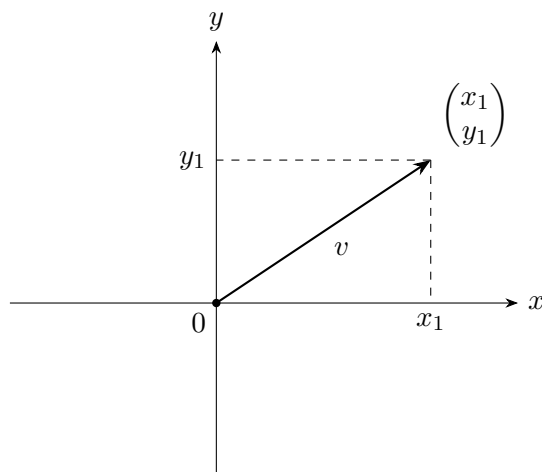
In particolare, usando adesso una notazione “verticale”,

$$\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}, \quad \mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Il piano euclideo $\mathbb{R}^2$. Gli elementi

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

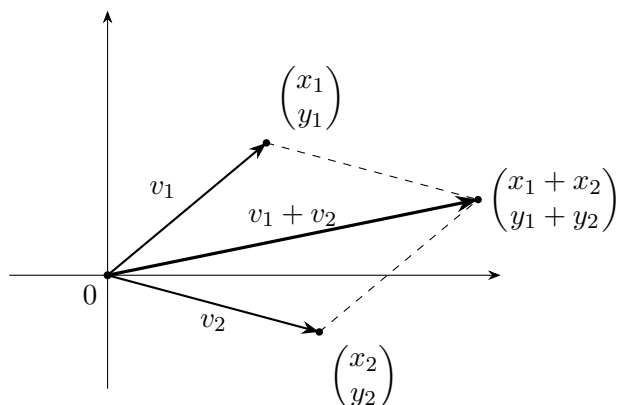
si chiamano *vettori*, mentre x e y sono le loro componenti.



L'operazione di somma tra i vettori di $\mathbb{R}^2$ è definita da

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}.$$

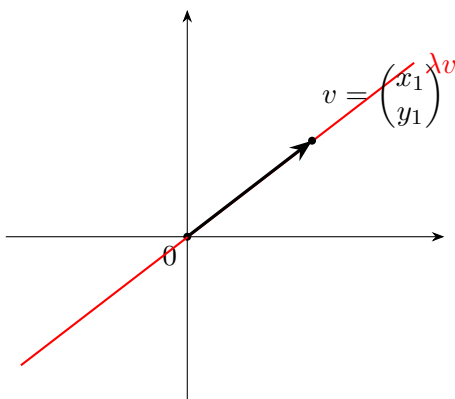
Geometricamente, la somma si rappresenta mediante la regola del parallelogramma.



Si definisce anche la *moltiplicazione per uno scalare* $\lambda \in \mathbb{R}$ dato un vettore v tramite

$$\lambda v = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda y_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Geometricamente, i multipli scalari di un vettore v giacciono sulla retta passante per l'origine e contenente v .



Valgono inoltre le proprietà

$$\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^2,$$

$$(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \forall v \in \mathbb{R}^2,$$

e

$$(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v), \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \forall v \in \mathbb{R}^2.$$

Le proprietà che abbiamo visto per il piano euclideo sono quelle che devono essere verificate da uno *spazio vettoriale reale*.

Definizione 3.1 (Spazio vettoriale reale). Uno *spazio vettoriale reale* è un insieme V , i cui elementi sono chiamati *vettori*, dotato di un'operazione di somma tra vettori e di un'operazione di moltiplicazione per scalari reali tali che

$$v + w \in V, \quad \forall v, w \in V,$$

e

$$\lambda v \in V, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall v \in V.$$

Inoltre, $(V, +)$ deve essere un gruppo commutativo e devono valere le proprietà

(i)

$$(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \forall v \in V;$$

(ii)

$$\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall v, w \in V;$$

(iii)

$$(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v), \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \forall v \in V;$$

(iv)

$$1 \cdot v = v, \quad \forall v \in V.$$

Esempi di spazi vettoriali euclidei.

Lo spazio $\mathbb{R}^2$ è uno spazio vettoriale con elemento neutro

$$0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e operazioni

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}, \quad \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}.$$

Analogamente, $\mathbb{R}^3$ è uno spazio vettoriale con elemento neutro

$$0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e operazioni

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}, \quad \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}.$$

Più in generale, $\mathbb{R}^n$ è uno spazio vettoriale con le operazioni definite componente per componente.

Lo spazio vettoriale dei polinomi.

Indichiamo con

$$\mathbb{R}[x] = \left\{ a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0 : m \in \mathbb{N}_0, a_i \in \mathbb{R} \forall i = 0, \dots, m \right\}$$

l'insieme dei polinomi a coefficienti reali. Tale insieme è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma tra polinomi e di moltiplicazione per uno scalare.

Il polinomio nullo è l'elemento neutro rispetto alla somma. Ad esempio, se

$$p(x) = 3x^2 + 2x - 1, \quad 0(x) = 0,$$

allora $p(x) + 0(x) = p(x)$. L'inverso additivo di $p(x)$ è il polinomio

$$q(x) = -3x^2 - 2x + 1,$$

per il quale $p(x) + q(x) = 0$. La somma tra polinomi è associativa e commutativa.

Se

$$p(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

e $\lambda \in \mathbb{R}$, definiamo

$$\lambda p(x) = (\lambda a_m) x^m + (\lambda a_{m-1}) x^{m-1} + \cdots + (\lambda a_1) x + \lambda a_0.$$

Con questa operazione valgono anche le proprietà (i)–(iv) della definizione di spazio vettoriale.

Lo spazio vettoriale delle matrici.

Dati $m, n \in \mathbb{N}$, indichiamo con $\mathcal{M}(m \times n, \mathbb{R})$ l'insieme delle tabelle di $m \cdot n$ numeri reali organizzati in m righe e n colonne. I suoi elementi si chiamano *matrici reali* $m \times n$. Ad esempio,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{3} & -5 \\ e^{-7} & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(2 \times 3, \mathbb{R}).$$

Una matrice $A \in \mathcal{M}(m \times n, \mathbb{R})$ si indica anche con

$$A = (a_{ij}), \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n,$$

dove a_{ij} è l'elemento che si trova nella riga i e nella colonna j . Nell'esempio precedente, $a_{21} = e^{-7}$ e $a_{13} = -5$.

Indichiamo con $A_1, \dots, A_m$ le righe di A e con $A^1, \dots, A^n$ le sue colonne. Per la matrice precedente,

$$A_1 = (2 \quad \sqrt{3} \quad -5), \quad A_2 = (e^{-7} \quad 0 \quad 1),$$

mentre

$$A^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ e^{-7} \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Proposizione 3.2. *Per ogni $m, n \in \mathbb{N}$, l'insieme $\mathcal{M}(m \times n, \mathbb{R})$ è uno spazio vettoriale rispetto alle operazioni di somma tra matrici e di moltiplicazione per uno scalare definite componente per componente.*

Precisamente, date $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ in $\mathcal{M}(m \times n, \mathbb{R})$, la matrice

$$C = A + B = (c_{ij})$$

è definita da

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$$

Ad esempio, se

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{3} & -5 \\ e^{-7} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} & 7 \\ 0 & e & 2 \end{pmatrix},$$

allora

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ e^{-7} & e & 3 \end{pmatrix}.$$

Se $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}(m \times n, \mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, la matrice

$$C = \lambda A = (c_{ij})$$

è definita da

$$c_{ij} = \lambda a_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$$

Ad esempio, per la matrice A precedente e per $\lambda = -2$ si ha

$$-2A = \begin{pmatrix} -4 & -2\sqrt{3} & 10 \\ -2e^{-7} & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Definizione 3.3 (Sottospazio vettoriale). Dato uno spazio vettoriale $(V, +, \mathbb{R})$, un sottoinsieme $W \subseteq V$ è un *sottospazio vettoriale* di V se valgono le seguenti proprietà:

- (i) $0 \in W$;
- (ii) per ogni $v_1, v_2 \in W$, si ha $v_1 + v_2 \in W$;
- (iii) per ogni $v \in W$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, si ha $\lambda v \in W$.

Per ogni spazio vettoriale V , i sottoinsiemi $\{0\}$ e V sono sottospazi vettoriali di V .

Esempi di sottospazi vettoriali.

In $\mathbb{R}^2$, oltre a $\{0\}$ e a $\mathbb{R}^2$, sono sottospazi vettoriali tutte e sole le rette passanti per l'origine. Una retta che non passa per l'origine non è invece un sottospazio vettoriale, poiché non contiene il vettore nullo.

In $\mathbb{R}^3$, oltre a $\{0\}$ e a $\mathbb{R}^3$, sono sottospazi vettoriali le rette passanti per l'origine e i piani passanti per l'origine.

Consideriamo ora lo spazio vettoriale $\mathbb{R}[x]$ e fissiamo un polinomio

$$p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0, \quad a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}, \quad a_2 \neq 0.$$

L'insieme

$$W = \{\lambda p(x) : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$. Infatti:

- (i) $0 \in W$, poiché $0 = 0 \cdot p(x)$;
- (ii) se $v_1, v_2 \in W$, esistono $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tali che

$$v_1 = \lambda_1 p(x), \quad v_2 = \lambda_2 p(x),$$

e quindi

$$v_1 + v_2 = (\lambda_1 + \lambda_2)p(x) \in W;$$

- (iii) se $v \in W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, allora $v = \mu p(x)$ per qualche $\mu \in \mathbb{R}$, e dunque

$$\lambda v = (\lambda \mu)p(x) \in W.$$

Non è invece un sottospazio vettoriale l'insieme

$$W = \{p \in \mathbb{R}[x] : \deg p = 2\}.$$

Infatti, presi

$$p(x) = x^2 + x - 1, \quad q(x) = -x^2,$$

si ha $p, q \in W$, ma

$$p(x) + q(x) = x - 1 \notin W,$$

poiché $x - 1$ ha grado 1.

Per ogni $k \in \mathbb{N}_0$, è invece un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$ l'insieme

$$\mathbb{R}_k[x] = \{p \in \mathbb{R}[x] : \deg p \leq k\} \cup \{0\}.$$

Infine, nello spazio vettoriale $\mathcal{M}(2 \times 3, \mathbb{R})$, l'insieme

$$W = \{A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}(2 \times 3, \mathbb{R}) : a_{13} = 0\}$$

è un sottospazio vettoriale. Esso è formato dalle matrici della forma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, \quad a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, a_{23} \in \mathbb{R}.$$

4. EQUAZIONI E SISTEMI LINEARI OMOGENEI

Un'equazione lineare omogenea in n variabili a coefficienti reali è un'equazione della forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0,$$

dove $x_1, \dots, x_n$ sono le variabili e $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ sono i coefficienti.

Ad esempio,

$$2x + y = 0$$

è un'equazione lineare omogenea in due variabili, ma potrebbe essere anche un'equazione lineare omogenea in tre variabili con coefficiente nullo per la variabile z ,

$$x - 2y + 3z = 0$$

è un'equazione lineare omogenea in tre variabili, mentre

$$x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 0$$

è un'equazione lineare omogenea in quattro variabili.

Il numero di variabili di un'equazione deve quindi essere dichiarato come dato del problema.

Proposizione 4.1. *L'insieme delle soluzioni di un'equazione lineare omogenea in n variabili è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.*

Dimostrazione. Sia

$$W = \left\{ v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n : a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0 \right\}.$$

Verifichiamo le tre proprietà che caratterizzano i sottospazi vettoriali.

Il vettore nullo appartiene a W , poiché

$$a_1 \cdot 0 + \cdots + a_n \cdot 0 = 0.$$

Siano ora

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in W, \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \in W.$$

Allora

$$a_1v_1 + \cdots + a_nv_n = 0, \quad a_1w_1 + \cdots + a_nw_n = 0.$$

Pertanto

$$\begin{aligned} a_1(v_1 + w_1) + \cdots + a_n(v_n + w_n) \\ = (a_1v_1 + \cdots + a_nv_n) + (a_1w_1 + \cdots + a_nw_n) = 0, \end{aligned}$$

e quindi $v + w \in W$.

Infine, se $v \in W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, allora

$$a_1(\lambda v_1) + \cdots + a_n(\lambda v_n) = \lambda(a_1v_1 + \cdots + a_nv_n) = 0,$$

da cui $\lambda v \in W$. □

Un sistema lineare omogeneo di m equazioni in n variabili a coefficienti reali è un sistema della forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Le incognite sono $x_1, \dots, x_n$, mentre

$$A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}(m \times n, \mathbb{R})$$

è la matrice dei coefficienti.

Proposizione 4.2. *L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in n variabili è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.*

Dimostrazione. L'insieme delle soluzioni del sistema è l'intersezione degli insiemi delle soluzioni delle singole equazioni. Il vettore nullo risolve tutte le equazioni; inoltre, la somma di due soluzioni e il prodotto di una soluzione per uno scalare risolvono ancora simultaneamente tutte le equazioni. Si tratta quindi di un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$. $\square$

Esempi.

Consideriamo l'equazione $y = 0$ come un'equazione lineare omogenea nelle due variabili x, y con coefficienti $a_1 = 0$ e $a_2 = 1$. Il suo insieme delle soluzioni è

$$W = \left\{ v = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\},$$

ossia l'asse delle ascisse.

L'equazione

$$x + y - z = 0$$

è un'equazione lineare omogenea in tre variabili. Il suo insieme delle soluzioni è un sottospazio vettoriale proprio di $\mathbb{R}^3$, diverso da $\{0\}$: geometricamente, è il piano passante per l'origine di equazione $z = x + y$.

5. DIMENSIONE E BASE DI UNO SPAZIO VETTORIALE

Definizione 5.1. Siano V uno spazio vettoriale e $v_1, \dots, v_k \in V$. Si chiama *sottospazio vettoriale generato* da $v_1, \dots, v_k$, e si indica con

$$\text{Span}(v_1, \dots, v_k),$$

il sottospazio formato da tutte le loro combinazioni lineari, ossia

$$\text{Span}(v_1, \dots, v_k) = \{ \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k : \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R} \}.$$

Ad esempio,

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right),$$

poiché

$$\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Consideriamo nuovamente il piano

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0 \right\}$$

e i vettori

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

I vettori v e w appartengono a W e non sono l'uno multiplo dell'altro. Le loro combinazioni lineari formano quindi un piano contenuto in W :

$$\text{Span}(v, w) = \{ \lambda_1 v + \lambda_2 w : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \} \subseteq W.$$

Poiché entrambi sono piani passanti per l'origine, si ha

$$W = \text{Span}(v, w).$$

Per verificare, ad esempio, se

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

appartiene a $W = \text{Span}(v, w)$, dobbiamo stabilire se esistono $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Ciò equivale al sistema

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0, \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 1. \end{cases}$$

Sottraendo la prima equazione dalla seconda otteniamo $\lambda_2 = -1$ e quindi $\lambda_1 = 2$. Questi valori soddisfano anche la terza equazione; pertanto

$$u = 2v - w$$

e dunque $u \in \text{Span}(v, w)$.

Dipendenza e indipendenza lineare.

Definizione 5.2. Siano $v_1, \dots, v_k \in V$. I vettori $v_1, \dots, v_k$ si dicono *linearmente dipendenti* se esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, non tutti nulli, tali che

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = 0.$$

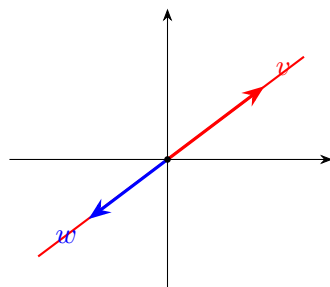
In caso contrario si dicono *linearmente indipendenti*; dunque $v_1, \dots, v_k$ sono linearmente indipendenti se

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = 0 \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0.$$

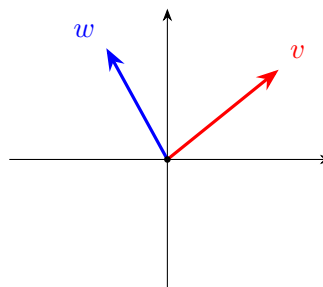
Se $v_1, \dots, v_k$ sono linearmente dipendenti, almeno uno di essi si può scrivere come combinazione lineare degli altri. Infatti, se per esempio $\lambda_1 \neq 0$, allora

$$v_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 - \dots - \frac{\lambda_k}{\lambda_1} v_k.$$

In particolare, due vettori non nulli v_1, v_2 sono linearmente dipendenti se e solo se uno è multiplo dell'altro, ossia se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $v_1 = \lambda v_2$.



v, w linearmente dipendenti



v, w linearmente indipendenti

In $\mathbb{R}^3$, se v e w sono linearmente indipendenti, allora $\text{Span}(v, w)$ è un piano passante per l'origine. Un terzo vettore v_3 rende v, w, v_3 linearmente dipendenti se appartiene a tale piano e linearmente indipendenti se non vi appartiene.

Dimensione e basi.

Definizione 5.3 (Dimensione). Uno spazio vettoriale V ha *dimensione* $d \in \mathbb{N}_0$ se ogni vettore di V si può scrivere come combinazione lineare di d vettori linearmente indipendenti e non è possibile generare V con un numero minore di vettori. In tal caso si scrive

$$\dim V = d.$$

Ad esempio, $\dim \mathbb{R} = 1$, $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ e $\dim \mathbb{R}^3 = 3$. Infatti,

$$\mathbb{R}^2 = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right),$$

poiché per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ si ha

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

e i due vettori sono linearmente indipendenti. Analogamente,

$$\mathbb{R}^3 = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right),$$

e i tre generatori sono linearmente indipendenti. Ogni retta passante per l'origine ha invece dimensione 1.

Definizione 5.4 (Base). Sia V uno spazio vettoriale di dimensione d . Una *base* di V è un insieme di d vettori linearmente indipendenti che generano V .

I vettori

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

formano la *base canonica* di $\mathbb{R}^2$, mentre

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

formano la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Definizione 5.5. Sia $v_1, \dots, v_d$ una base di V . Per ogni $w \in V$, gli unici scalari $\lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathbb{R}$ tali che

$$w = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_d v_d$$

si chiamano *coordinate di w rispetto alla base $v_1, \dots, v_d$* .

Ad esempio, rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$ il vettore

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = e_1 + 2e_2$$

ha coordinate $(1, 2)$. Consideriamo invece la base

$$w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le coordinate di v rispetto a questa base si determinano risolvendo

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ossia

$$\begin{cases} 2\lambda_1 - 2\lambda_2 &= 1, \\ \lambda_1 + \lambda_2 &= 2. \end{cases}$$

Si ottiene $\lambda_1 = 5/4$ e $\lambda_2 = 3/4$; pertanto

$$v = \frac{5}{4}w_1 + \frac{3}{4}w_2, \quad [v]_{(w_1, w_2)} = \begin{pmatrix} 5/4 \\ 3/4 \end{pmatrix}.$$

La scelta della base non è unica. Ad esempio,

$$\mathbb{R}^2 = \text{Span}(e_1, e_2) = \text{Span}\left(e_1, e_2, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right),$$

ma il secondo insieme di generatori non è una base, perché contiene tre vettori ed è linearmente dipendente. Analogamente,

$$\mathbb{R}^3 = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right),$$

e questi tre vettori formano una base di $\mathbb{R}^3$: infatti, da

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

segue $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Dimensione dello spazio delle matrici.

Consideriamo lo spazio vettoriale $M(2 \times 2, \mathbb{R})$. Le matrici

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

formano una base. Infatti, ogni matrice si scrive nella forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = aE_{11} + bE_{12} + cE_{21} + dE_{22},$$

e questi quattro generatori sono linearmente indipendenti. Quindi

$$\dim M(2 \times 2, \mathbb{R}) = 4.$$

Più in generale, indicando con E_{ij} la matrice che ha 1 nella posizione (i, j) e 0 in tutte le altre posizioni, le mn matrici E_{ij} formano una base di $M(m \times n, \mathbb{R})$. Pertanto

$$\dim M(m \times n, \mathbb{R}) = mn.$$

6. SOMMA E INTERSEZIONE DI SOTTOSPAZI VETTORIALI

Definizione 6.1. Siano U, W due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V . Si chiama *intersezione* di U e W l'insieme

$$U \cap W = \{v \in V : v \in U \text{ e } v \in W\}.$$

Proposizione 6.2. *L'intersezione $U \cap W$ è un sottospazio vettoriale di V .*

Dimostrazione. Poiché $0 \in U$ e $0 \in W$, si ha $0 \in U \cap W$. Se $v_1, v_2 \in U \cap W$, allora v_1, v_2 appartengono sia a U sia a W ; pertanto $v_1 + v_2 \in U \cap W$. Infine, se $v \in U \cap W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, allora λv appartiene sia a U sia a W , e dunque $\lambda v \in U \cap W$. $\square$

Ad esempio, in $\mathbb{R}^3$ consideriamo i piani

$$(1) \quad U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x + y - z = 0 \right\}, \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x - y + 2z = 0 \right\}.$$

Allora $\dim U = \dim W = 2$ e

$$U \cap W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{cases} x + y - z = 0, \\ x - y + 2z = 0 \end{cases} \right\}.$$

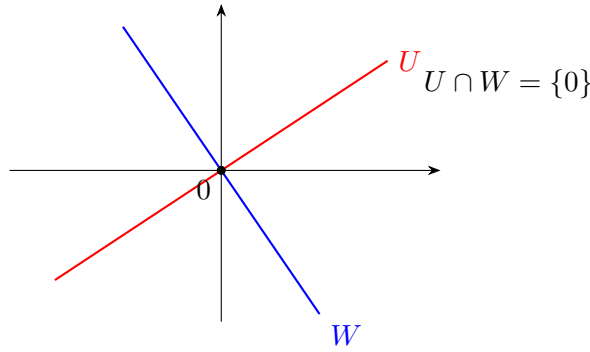
Risolvendo il sistema si trova

$$x = -\frac{1}{2}z, \quad y = \frac{3}{2}z,$$

e quindi

$$U \cap W = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right), \quad \dim(U \cap W) = 1.$$

Geometricamente, due rette distinte passanti per l'origine in $\mathbb{R}^2$ si intersecano soltanto nell'origine.



Definizione 6.3. Siano U, W due sottospazi vettoriali di V . Si chiama *somma* di U e W l'insieme

$$U + W = \{u + w : u \in U, w \in W\}.$$

Proposizione 6.4. La somma $U + W$ è un sottospazio vettoriale di V .

Se, ad esempio,

$$U = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad W = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right),$$

allora $\dim U = \dim W = 1$, $U \cap W = \{0\}$ e

$$U + W = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \mathbb{R}^2.$$

Teorema 6.5 (Formula di Grassmann). Siano U, W due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V di dimensione finita. Allora

$$\dim(U \cap W) + \dim(U + W) = \dim U + \dim W.$$

Ad esempio, se U e W sono due piani di $\mathbb{R}^3$, entrambi di dimensione 2, allora:

- se $U + W = \mathbb{R}^3$, si ha $\dim(U \cap W) = 1$;
- se $U + W$ ha dimensione 2, si ha $\dim(U \cap W) = 2$, e quindi $U = W$.

Se invece $\dim U = 2$ e $\dim W = 1$ in $\mathbb{R}^3$, le sole possibilità sono

$\dim(U + W)$	$\dim(U \cap W)$
3	0
2	1.

La prima si verifica quando la retta W non è contenuta nel piano U ; la seconda quando $W \subseteq U$.

7. SISTEMI LINEARI E ALGORITMO DI GAUSS-JORDAN

Consideriamo un sistema di m equazioni lineari nelle n variabili $x_1, \dots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Introduciamo la *matrice dei coefficienti*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M(m \times n, \mathbb{R}),$$

il vettore delle incognite e il vettore dei termini noti

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m.$$

Il sistema si può allora scrivere in forma compatta come

$$Ax = b.$$

Esso si dice *omogeneo* se $b = 0$, ossia se tutti i termini noti sono nulli; in caso contrario si dice *non omogeneo*.

La matrice

$$C = (A \mid b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

si chiama *matrice completa* o *matrice aumentata* del sistema.

Mosse di Gauss sulle righe.

Le seguenti operazioni elementari trasformano un sistema lineare in un sistema equivalente, cioè con lo stesso insieme delle soluzioni:

(i) scambiare due righe:

$$C_i \longleftrightarrow C_j;$$

(ii) moltiplicare una riga per uno scalare non nullo:

$$C_i \longrightarrow \lambda C_i, \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$$

(iii) sostituire una riga con la somma di essa e un multiplo di un'altra riga:

$$C_i \longrightarrow C_i + \lambda C_j, \quad i \neq j.$$

Proposizione 7.1. *Le mosse di Gauss non cambiano l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare.*

Dimostrazione. Lo scambio di due equazioni non modifica le condizioni che devono essere soddisfatte. Moltiplicare un'equazione per uno scalare non nullo produce un'equazione equivalente. Infine, sostituire un'equazione con la somma di essa e un multiplo di un'altra è un'operazione reversibile: da $C_i + \lambda C_j$ si recupera C_i sottraendo λC_j . In tutti e tre i casi si ottiene quindi un sistema con le stesse soluzioni. $\square$

Pivot e forma a scalini.

Definizione 7.2. Il *pivot* di una riga non nulla di una matrice è il primo elemento non nullo della riga, letta da sinistra verso destra.

Definizione 7.3. Una matrice si dice *a scalini* se il pivot di ogni riga non nulla si trova strettamente più a destra del pivot della riga precedente e tutte le righe nulle si trovano in fondo alla matrice.

Ad esempio, la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

non è a scalini, mentre la matrice della forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

è a scalini.

L'*algoritmo di Gauss–Jordan* per risolvere un sistema lineare consiste nei seguenti passi:

- si applicano le mosse di Gauss alla matrice completa fino a ottenere una matrice a scalini;
- si usano le mosse (ii) e (iii) per rendere ogni pivot uguale a 1 e annullare tutti gli altri elementi nella colonna del pivot;
- si scelgono come parametri liberi le variabili corrispondenti alle colonne prive di pivot e si esprimono in funzione di esse le variabili corrispondenti alle colonne con pivot.

Se nella forma a scalini compare una riga del tipo

$$(0 \ \cdots \ 0 \mid c), \quad c \neq 0,$$

il sistema non ha soluzioni, perché tale riga corrisponde all'equazione $0 = c$.

Esempio: un sistema omogeneo.

Consideriamo il sistema ottenuto da $U \cap W$ di equazione (1)

$$\begin{cases} x + y - z = 0, \\ x - y + 2z = 0. \end{cases}$$

Partendo da

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right),$$

eseguiamo le mosse

$$C_2 \longrightarrow C_2 - C_1, \quad C_2 \longrightarrow -\frac{1}{2}C_2, \quad C_1 \longrightarrow C_1 - C_2.$$

Si giunge così alla matrice ridotta

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 0 \end{array} \right).$$

La variabile z è libera. Ponendo $z = \lambda$ troviamo

$$x = -\frac{1}{2}\lambda, \quad y = \frac{3}{2}\lambda, \quad z = \lambda.$$

Pertanto l'insieme delle soluzioni è

$$\left\{ \lambda \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right),$$

in accordo con il calcolo di $U \cap W$ svolto in precedenza.

Altri esempi.

Consideriamo il sistema omogeneo

$$\begin{cases} x + y - z = 0, \\ 2x + 2y - 2z = 0. \end{cases}$$

La sua matrice completa è

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \end{array} \right).$$

Con la mossa $C_2 \rightarrow C_2 - 2C_1$ otteniamo

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Le variabili y e z sono libere. Ponendo $y = \lambda_1$ e $z = \lambda_2$, si ha $x = -\lambda_1 + \lambda_2$, e quindi

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

L'insieme delle soluzioni è pertanto il sottospazio

$$\text{Span} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

di dimensione 2.

Consideriamo ora il sistema non omogeneo

$$\begin{cases} x - z = 1, \\ x + 2y + z = 2. \end{cases}$$

La matrice completa si riduce nel modo seguente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{C_2 \rightarrow C_2 - C_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{C_2 \rightarrow \frac{1}{2}C_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{array} \right).$$

La variabile z è libera. Ponendo $z = \lambda$, otteniamo

$$x = 1 + \lambda, \quad y = \frac{1}{2} - \lambda, \quad z = \lambda,$$

e quindi

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

L'insieme delle soluzioni è dunque la retta affine

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right),$$

che non passa per l'origine.

La retta del piano di equazione

$$y = \frac{3}{2}x + 1$$

può essere trattata come il sistema non omogeneo

$$-\frac{3}{2}x + y = 1.$$

La matrice completa

$$\left(\begin{array}{cc|c} -\frac{3}{2} & 1 & 1 \end{array} \right)$$

si normalizza moltiplicando la riga per $-2/3$:

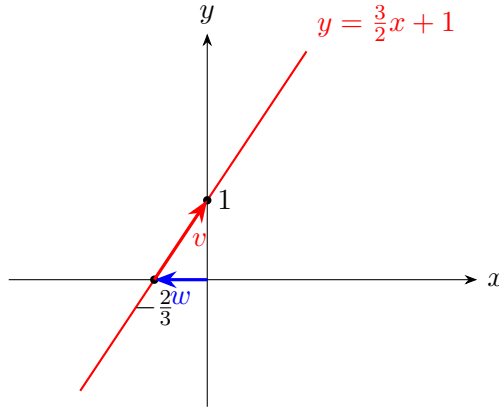
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{array} \right).$$

Ponendo $y = \lambda$, si ottiene

$$x = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\lambda,$$

e pertanto

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}.$$



Infine, risolviamo il sistema

$$\begin{cases} -y + 2z = 6, \\ x + 2y = 3, \\ 2x + 2y + z = -3. \end{cases}$$

La matrice completa è

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & -3 \end{array} \right).$$

Applichiamo successivamente le mosse

$$C_1 \longleftrightarrow C_3, \quad C_2 \longrightarrow 2C_2 - C_1, \quad C_3 \longrightarrow 2C_3 + C_2.$$

Otteniamo

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 21 \end{array} \right).$$

Eliminiamo ora gli elementi sopra i pivot e normalizziamo le righe; si arriva alla matrice ridotta

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -13 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array} \right).$$

Il sistema ha quindi l'unica soluzione

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Interpretazione della scrittura $Ax = b$.

Siano

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M(m \times n, \mathbb{R}) \quad \text{e} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Il *prodotto matrice-vettore* Ax è il vettore di $\mathbb{R}^m$ definito da

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}.$$

Pertanto un sistema lineare di m equazioni in n incognite si scrive

$$Ax = b, \quad A \in M(m \times n, \mathbb{R}), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad b \in \mathbb{R}^m.$$

Ad esempio, ponendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} -13 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix},$$

si ha

$$Ax = \begin{pmatrix} 0 \cdot (-13) - 1 \cdot 8 + 2 \cdot 7 \\ 1 \cdot (-13) + 2 \cdot 8 + 0 \cdot 7 \\ 2 \cdot (-13) + 2 \cdot 8 + 1 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Questo verifica direttamente la soluzione trovata alla fine della sezione precedente.

Consideriamo anche

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \in M(2 \times 3, \mathbb{R}), \quad x = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Allora

$$Ax = \begin{pmatrix} 3 + 1 \\ 6 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix},$$

quindi x è una soluzione del sistema

$$\begin{cases} x - y = 4, \\ 2x - 3z = 0. \end{cases}$$

Per trovare tutte le soluzioni riduciamo la matrice completa:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \end{array} \right) & \xrightarrow{C_2 \rightarrow C_2 - 2C_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -3 & -8 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{C_1 \rightarrow 2C_1 + C_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -8 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{C_1 \rightarrow \frac{1}{2}C_1, C_2 \rightarrow \frac{1}{2}C_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -4 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Ponendo $z = \lambda$, troviamo

$$x = \frac{3}{2}\lambda, \quad y = -4 + \frac{3}{2}\lambda, \quad z = \lambda.$$

L'insieme delle soluzioni è dunque la retta affine

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

In particolare,

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Il prodotto scalare e i sistemi lineari

Definizione 7.4 (Prodotto scalare). Dati due vettori

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

di $\mathbb{R}^n$, si chiama *prodotto scalare* di x e y il numero reale

$$\langle x, y \rangle = x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n.$$

Se $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix} \in M(1 \times 2, \mathbb{R})$, il sistema omogeneo $Ax = 0$ è

$$2x - 3y = 0.$$

Riducendo la matrice completa otteniamo

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{C_1 \rightarrow \frac{1}{2}C_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{3}{2} & 0 \end{array} \right),$$

e quindi

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

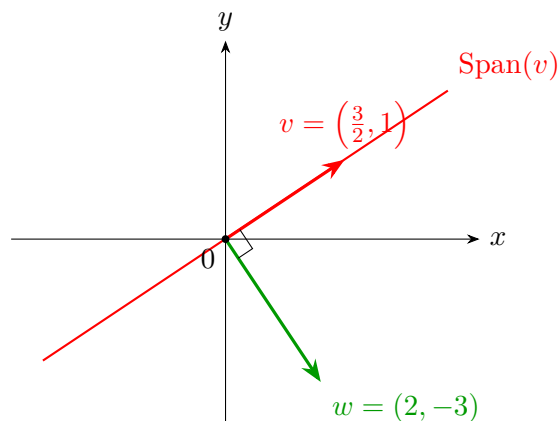
Le soluzioni formano la retta

$$\text{Span} \left(\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Osserviamo che, posto $w = (2, -3)$, l'equazione $Ax = 0$ si può scrivere

$$w \cdot x = 0.$$

Pertanto la retta delle soluzioni è ortogonale al vettore w .



Più in generale, il sistema

$$\begin{cases} x - y &= 0, \\ 2x - 3z &= 0 \end{cases}$$

si può scrivere come

$$w_1 \cdot x = 0, \quad w_2 \cdot x = 0,$$

dove

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Il suo insieme delle soluzioni è quindi formato dai vettori di $\mathbb{R}^3$ ortogonali sia a w_1 sia a w_2 . Per trovarli è sufficiente risolvere il sistema lineare.

8. APPLICAZIONI LINEARI

Definizione 8.1. Un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ è una funzione che associa a ogni vettore $x \in \mathbb{R}^n$ un unico vettore $L(x) \in \mathbb{R}^m$ e soddisfa, per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$ e ogni $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$L(0) = 0,$$

$$L(x + y) = L(x) + L(y),$$

$$L(\lambda x) = \lambda L(x).$$

Proposizione 8.2. Data una matrice $A \in M(m \times n, \mathbb{R})$, l'applicazione

$$L_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad L_A(x) = Ax,$$

è lineare.

Dimostrazione. Per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, le proprietà del prodotto matrice-vettore danno

$$A0 = 0, \quad A(x + y) = Ax + Ay, \quad A(\lambda x) = \lambda Ax.$$

□

Definizione 8.3. L'immagine della matrice $A \in M(m \times n, \mathbb{R})$ è il sottoinsieme di $\mathbb{R}^m$ definito da

$$\text{Im}(A) = \{y \in \mathbb{R}^m : \text{esiste } x \in \mathbb{R}^n \text{ tale che } Ax = y\}.$$

L'immagine di A è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^m$. Dalla definizione segue immediatamente che il sistema

$$Ax = b$$

ha almeno una soluzione se e solo se

$$b \in \text{Im}(A).$$

In particolare, un sistema omogeneo $Ax = 0$ ammette sempre almeno la soluzione nulla, poiché $0 \in \text{Im}(A)$ e $A0 = 0$.

Sia

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in M(2 \times 3, \mathbb{R}).$$

Indicando con e_1, e_2, e_3 la base canonica di $\mathbb{R}^3$, si ha

$$Ae_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = A^1, \quad Ae_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = A^2, \quad Ae_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = A^3,$$

dove A^1, A^2, A^3 sono le colonne di A .

Per ogni $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ si ha

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3,$$

e, per linearità,

$$Ax = x_1 A^1 + x_2 A^2 + x_3 A^3.$$

Ne segue il seguente risultato.

Proposizione 8.4. *Sia $A \in M(m \times n, \mathbb{R})$ e siano $A^1, \dots, A^n \in \mathbb{R}^m$ le sue colonne. Allora*

$$\text{Im}(A) = \text{Span}(A^1, \dots, A^n).$$

Nel caso precedente,

$$\text{Im}(A) = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \mathbb{R}^2,$$

poiché le prime due colonne sono linearmente indipendenti. Di conseguenza, $Ax = b$ ha almeno una soluzione per ogni $b \in \mathbb{R}^2$.

Definizione 8.5. Il *rank* di una matrice $A \in M(m \times n, \mathbb{R})$ è il massimo numero di colonne linearmente indipendenti di A e si indica con

$$\text{rank}(A).$$

Poiché le colonne di A sono vettori di $\mathbb{R}^m$ e il loro numero è n , si ha

$$\text{rank}(A) \leq m, \quad \text{rank}(A) \leq n.$$

Proposizione 8.6. *Per ogni $A \in M(m \times n, \mathbb{R})$ vale*

$$\text{rank}(A) = \dim \text{Im}(A).$$

Nell'esempio precedente le prime due colonne sono linearmente indipendenti, mentre tutte le colonne appartengono a $\mathbb{R}^2$. Pertanto

$$\text{rank}(A) = 2 = \dim \text{Im}(A)$$

e $\text{Im}(A) = \mathbb{R}^2$.

Proposizione 8.7. *Il sistema lineare*

$$Ax = b$$

ammette almeno una soluzione se e solo se

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(A \mid b),$$

dove $(A \mid b)$ è la matrice completa del sistema.

Dimostrazione. Il sistema è risolubile se e solo se $b \in \text{Im}(A)$, ossia se e solo se b è combinazione lineare delle colonne di A . Ciò avviene precisamente quando l'aggiunta della colonna b non aumenta il massimo numero di colonne linearmente indipendenti, cioè quando $\text{rank}(A) = \text{rank}(A \mid b)$. $\square$

Un sistema dipendente da un parametro.

Consideriamo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R},$$

e chiediamoci per quali valori di k il sistema $Ax = b$ ammette soluzioni. Partiamo dalla matrice completa

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & k & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \end{array} \right).$$

Scambiando la prima e la terza riga ed eseguendo successivamente le mosse

$$C_2 \longrightarrow C_2 - C_1, \quad C_3 \longrightarrow 2C_3 - C_1, \quad C_3 \longrightarrow 2C_3 - C_2,$$

otteniamo una matrice a scalini equivalente:

$$C \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 4(k-1) & -1 \end{array} \right).$$

Se $k = 1$, l'ultima riga diventa

$$(0 \quad 0 \quad 0 \mid -1),$$

che corrisponde all'equazione impossibile $0 = -1$. Dunque il sistema non ha soluzioni. In termini di rango,

$$\text{rank}(A) = 2, \quad \text{rank}(A \mid b) = 3.$$

Se $k \neq 1$, la matrice dei coefficienti ha tre pivot e quindi

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(A \mid b) = 3.$$

Il sistema ha pertanto almeno una soluzione. Dalle equazioni originarie

$$\begin{cases} x + kz = 0, \\ 2x + y = 0, \\ 2x - y + 4z = 1 \end{cases}$$

si ricava

$$x = -kz, \quad y = 2kz, \quad 4(1 - k)z = 1.$$

Quindi, per $k \neq 1$, la soluzione è unica ed è data da

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{k}{4(1-k)} \\ \frac{k}{2(1-k)} \\ \frac{1}{4(1-k)} \end{pmatrix}.$$

Nel caso $k = 1$ si può verificare direttamente che

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

ha rango 2. Infatti, le prime due colonne

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

sono linearmente indipendenti, mentre la terza è una loro combinazione lineare:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice completa ha invece rango 3, poiché le sue colonne prima, seconda e quarta sono linearmente indipendenti. Questo fornisce un'altra verifica dell'incompatibilità del sistema per $k = 1$.

9. DETERMINANTE DI UNA MATRICE QUADRATA

Sia $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ una matrice quadrata. Il *determinante* di A è un numero reale, indicato con

$$\det(A) \quad \text{oppure} \quad |A|.$$

Se $n = 1$ e $A = (a_{11})$, si pone

$$\det(A) = a_{11}.$$

Se $n = 2$ e

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

si definisce

$$\det(A) = ad - bc.$$

Ad esempio,

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot 4 - 1 \cdot 3 = 5.$$

Interpretazione geometrica in $\mathbb{R}^2$.

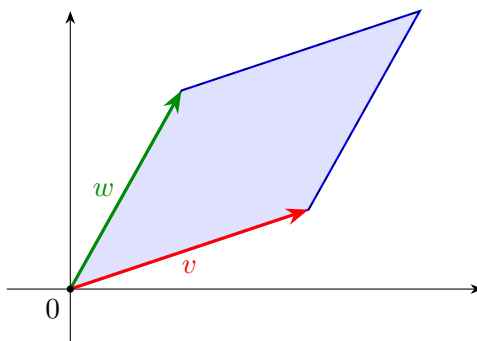
Consideriamo i vettori

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

e la matrice che li ha come colonne:

$$A = \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix}.$$

Il valore assoluto $|\det(A)|$ è l'area del parallelogramma generato da v e w .



Il parallelogramma ha area nulla precisamente quando v e w giacciono sulla stessa retta, ossia quando sono linearmente dipendenti. Pertanto

$$\det(A) = 0 \iff v, w \text{ sono linearmente dipendenti.}$$

Ad esempio, per

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ k & 4 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R},$$

si ha

$$\det(A) = 4 - k^2.$$

Le colonne di A sono linearmente dipendenti se e solo se

$$4 - k^2 = 0,$$

ossia se e solo se $k = 2$ oppure $k = -2$. Per $k \neq \pm 2$ le colonne sono linearmente indipendenti e $\text{rank}(A) = 2$.

Determinante di una matrice 3×3 .

Sia

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Per $i, j \in \{1, 2, 3\}$, indichiamo con $\hat{A}_{ij}$ la matrice 2×2 ottenuta cancellando da A la riga i e la colonna j . Ad esempio,

$$\hat{A}_{11} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \hat{A}_{23} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}, \quad \hat{A}_{32} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{pmatrix}.$$

Lo *sviluppo di Laplace lungo la riga i* è

$$\det(A) = \sum_{j=1}^3 (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\hat{A}_{ij}),$$

mentre lo *sviluppo di Laplace lungo la colonna j* è

$$\det(A) = \sum_{i=1}^3 (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\hat{A}_{ij}).$$

I segni dei coefficienti seguono lo schema

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}.$$

Consideriamo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

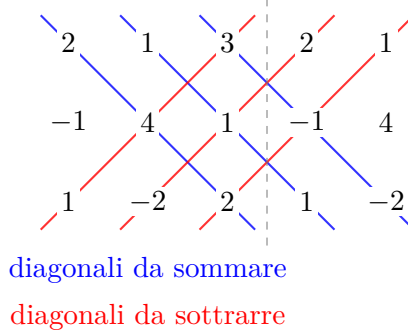
Sviluppando lungo la seconda riga troviamo

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-1)^{2+1}(-1) \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^{2+2}4 \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &\quad + (-1)^{2+3}1 \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= (2 + 6) + 4(4 - 3) - (-4 - 1) \\ &= 8 + 4 + 5 = 17. \end{aligned}$$

Lo stesso risultato si ottiene sviluppando lungo la prima colonna:

$$\begin{aligned} \det(A) &= 2 \det \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} - (-1) \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} + 1 \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 2(8 + 2) + (2 + 6) + (1 - 12) \\ &= 20 + 8 - 11 = 17. \end{aligned}$$

Per una matrice 3×3 si può anche usare la *regola di Sarrus*: si riscrivono a destra della matrice le prime due colonne, si sommano i prodotti lungo le tre diagonal discendenti e si sottraggono i prodotti lungo le tre diagonal ascendenti. Per la matrice precedente,



$$\begin{aligned}\det(A) &= 2 \cdot 4 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) \cdot (-2) \\ &\quad - 3 \cdot 4 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot (-2) - 1 \cdot (-1) \cdot 2 \\ &= 16 + 1 + 6 - 12 + 2 + 4 = 17.\end{aligned}$$

Proposizione 9.1. Siano $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ e sia $A = (v_1 \ v_2 \ v_3)$ la matrice che ha questi vettori come colonne. Allora

$$v_1, v_2, v_3 \text{ sono linearmente indipendenti} \iff \det(A) \neq 0.$$

Equivalentemente,

$$\text{rank}(A) = 3 \iff \det(A) \neq 0.$$

Questa proprietà vale in ogni dimensione: per $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$, le colonne di A sono linearmente indipendenti se e solo se $\det(A) \neq 0$.

Torniamo alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

La regola di Sarrus dà

$$\det(A) = 4 - 4k = 4(1 - k).$$

Se $k \neq 1$, si ha $\det(A) \neq 0$ e dunque $\text{rank}(A) = 3$. Se $k = 1$, invece, $\det(A) = 0$ e quindi $\text{rank}(A) \leq 2$. Tuttavia la sottomatrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ha determinante $-1 \neq 0$; le corrispondenti due righe e due colonne sono quindi linearmente indipendenti e $\text{rank}(A) \geq 2$. Ne segue che

$$\text{rank}(A) = 2.$$

Proposizione 9.2. Sia $A \in M(m \times n, \mathbb{R})$. Il rango di A è uguale al massimo ordine di una sottomatrice quadrata di A con determinante diverso da zero.

In altre parole, per dimostrare che $\text{rank}(A) = r$ è sufficiente verificare che:

- esiste una sottomatrice $r \times r$ con determinante non nullo;
- tutte le sottomatrici quadrate di ordine maggiore di r hanno determinante nullo.

10. SOTTOSPAZI AFFINI E STRUTTURA DELLE SOLUZIONI

Definizione 10.1. Un sottoinsieme W di $\mathbb{R}^n$ si chiama *sottospazio affine* se esistono un vettore $w \in \mathbb{R}^n$ e un sottospazio vettoriale $U \subseteq \mathbb{R}^n$ tali che

$$W = w + U := \{w + u : u \in U\}.$$

Si definisce

$$\dim W := \dim U.$$

Se $w \in U$, allora $w + U = U$ e il sottospazio affine è anche un sottospazio vettoriale. Se $w \notin U$, l'insieme $w + U$ è una traslazione di U e non contiene l'origine.

Proposizione 10.2. *Sia $A \in M(m \times n, \mathbb{R})$ e sia $b \in \mathbb{R}^m$. Se il sistema $Ax = b$ ammette una soluzione particolare w , allora l'insieme W di tutte le sue soluzioni è il sottospazio affine*

$$W = w + U, \quad U = \{u \in \mathbb{R}^n : Au = 0\}.$$

Inoltre,

$$\dim W = n - \text{rank}(A).$$

Dimostrazione. Se x è una soluzione di $Ax = b$, allora

$$A(x - w) = Ax - Aw = b - b = 0,$$

e quindi $x - w \in U$, ossia $x \in w + U$. Viceversa, se $u \in U$, allora

$$A(w + u) = Aw + Au = b + 0 = b,$$

perciò $w + u$ è una soluzione. La formula per la dimensione segue dal fatto che il sistema omogeneo $Au = 0$ ha $n - \text{rank}(A)$ variabili libere. $\square$

Teorema 10.3 (Rouché–Capelli). *Consideriamo un sistema lineare di m equazioni in n incognite*

$$Ax = b,$$

dove $A \in M(m \times n, \mathbb{R})$ è la matrice dei coefficienti, $b \in \mathbb{R}^m$ è il vettore dei termini noti e

$$C = (A \mid b)$$

è la matrice completa. Il sistema ammette almeno una soluzione se e solo se

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(C).$$

Se il sistema è compatibile e

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(C) = r,$$

allora l'insieme W delle soluzioni è un sottospazio affine di $\mathbb{R}^n$ di dimensione

$$\dim W = n - r.$$

In particolare:

- se $r = n$, il sistema ha un'unica soluzione;
- se $r < n$, il sistema ha infinite soluzioni, dipendenti da $n - r$ parametri liberi.

Esempio con parametro.

Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x + ky = 4 - k, \\ kx + 4y = 4, \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}.$$

La matrice dei coefficienti e la matrice completa sono

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ k & 4 \end{pmatrix}, \quad C = (A \mid b) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & k & 4 - k \\ k & 4 & 4 \end{array} \right).$$

Poiché

$$\det(A) = 4 - k^2,$$

occorre distinguere tre casi.

Se $k \neq \pm 2$, allora $\text{rank}(A) = 2$ e anche $\text{rank}(C) = 2$. Il sistema ha un'unica soluzione. Dalla prima equazione,

$$x = 4 - k - ky;$$

sostituendo nella seconda si ottiene

$$(4 - k^2)y = (k - 2)^2.$$

Quindi

$$y = \frac{2-k}{k+2}, \quad x = \frac{8}{k+2},$$

e l'insieme delle soluzioni è

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{8}{k+2} \\ \frac{2-k}{k+2} \end{pmatrix} \right\}.$$

Se $k = 2$, si ha

$$C = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \end{array} \right), \quad \text{rank}(A) = \text{rank}(C) = 1.$$

Il sistema si riduce all'unica equazione $x + 2y = 2$. Ponendo $y = \lambda$, troviamo

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\},$$

che è una retta affine di dimensione 1.

Se $k = -2$, si ha

$$C = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 6 \\ -2 & 4 & 4 \end{array} \right).$$

La matrice A ha rango 1, mentre la sottomatrice formata dalla seconda colonna e dalla colonna dei termini noti ha determinante

$$\det \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = -8 - 24 = -32 \neq 0.$$

Pertanto $\text{rank}(C) = 2$ e, per il teorema di Rouché–Capelli,

$$W = \emptyset.$$

Esempio.

Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} y - z &= 1, \\ 2x - 4y + 4z &= -2, \\ x - y + z &= 0. \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti e la matrice completa sono

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Poiché

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = -2 \neq 0,$$

si ha $\text{rank}(A) \geq 2$. D'altra parte,

$$\det(A) = (0 + 4 + 2) - (4 + 0 + 2) = 0,$$

e quindi $\text{rank}(A) = 2$.

Per la matrice completa si ha

$$\text{rank}(C) = 2 = \text{rank}(A).$$

Per il teorema di Rouché–Capelli il sistema ammette soluzioni e il suo insieme delle soluzioni è un sottospazio affine di dimensione

$$3 - \text{rank}(A) = 1.$$

Le equazioni indipendenti possono essere scritte come

$$y - z = 1, \quad x - y + z = 0.$$

Ponendo $z = \lambda$, si ottengono $y = 1 + \lambda$ e $x = 1$. Dunque

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Il primo vettore è una soluzione particolare del sistema, mentre il secondo genera lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato.

Esempio.

Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} 3x_1 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_2 - 2x_3 - x_4 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + x_4 = 1. \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti è

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 4 & 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sviluppando il determinante rispetto alla prima colonna, si trova

$$\begin{aligned} \det(A) &= 3 \det \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 4 \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 3 \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \\ &= 3(-4) + 4(2) - 3(-2) = 2 \neq 0. \end{aligned}$$

Pertanto $\text{rank}(A) = 4$. Anche la matrice completa C ha rango 4 e, per il teorema di Rouché–Capelli, il sistema ammette un'unica soluzione. Riducendo la matrice completa con le mosse di Gauss si ottiene

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}.$$

In generale, se $A \in \mathcal{M}(n \times n)$ e $\det(A) \neq 0$, allora, per ogni $b \in \mathbb{R}^n$, il sistema $Ax = b$ ammette un'unica soluzione.

Esempio.

Troviamo i vettori di $\mathbb{R}^3$ che sono ortogonali a entrambe le rette

$$r_1 = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad r_2 = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Un vettore $(x, y, z)^T$ è ortogonale a r_1 se e solo se

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \quad \text{ossia} \quad x + y = 0.$$

Analogamente, è ortogonale a r_2 se e solo se

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \quad \text{ossia} \quad x + 2y + z = 0.$$

Dobbiamo quindi risolvere il sistema omogeneo

$$\begin{cases} x + y &= 0, \\ x + 2y + z &= 0. \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ha rango 2, perché

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0.$$

Lo spazio delle soluzioni ha dunque dimensione $3 - 2 = 1$. Applicando le mosse

$$C_2 \longrightarrow C_2 - C_1, \quad C_1 \longrightarrow C_1 - C_2,$$

alla matrice completa si ottiene

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Pertanto $x = z$ e $y = -z$. Ponendo $z = \lambda$, troviamo

$$W = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Esempio con parametro.

Troviamo, al variare di $k \in \mathbb{R}$, le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x + 2y &= 1, \\ 2x - y &= 0, \\ x + y &= k. \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti e la matrice completa sono

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & k \end{array} \right).$$

Poiché

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = -5 \neq 0,$$

si ha $\text{rank}(A) = 2$. Inoltre

$$\det(C) = 3 - 5k.$$

Quindi

$$\text{rank}(C) = \begin{cases} 2, & k = \frac{3}{5}, \\ 3, & k \neq \frac{3}{5}. \end{cases}$$

Per il teorema di Rouché–Capelli il sistema ammette soluzioni se e solo se $k = 3/5$. In tal caso la soluzione è unica, perché

$$2 - \text{rank}(A) = 0.$$

Riducendo la matrice completa mediante le mosse di Gauss, si ottiene

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

e dunque

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{5} \\ 2 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix} \right\}.$$

11. APPROFONDIMENTI SULLE MATRICI

Siano $A \in \mathcal{M}(m \times n)$ e $x \in \mathbb{R}^n$. Il prodotto Ax è un vettore di $\mathbb{R}^m$. Più in generale, se

$$A \in \mathcal{M}(m \times n), \quad B \in \mathcal{M}(n \times k),$$

allora è definito il prodotto $AB \in \mathcal{M}(m \times k)$. L'elemento di posto (i, j) di AB si ottiene moltiplicando scalarmente la riga i di A per la colonna j di B .

Esempio.

Consideriamo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Allora

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 & 2 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 & 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 0 - 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 3 + 2 \cdot 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Se $A \in \mathcal{M}(m \times n)$ e $B \in \mathcal{M}(n \times m)$, sono definiti entrambi i prodotti, ma

$$AB \in \mathcal{M}(m \times m), \quad BA \in \mathcal{M}(n \times n).$$

Anche quando $m = n$, in generale $AB \neq BA$.

La *matrice identità* di ordine n è

$$I = I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(n \times n).$$

Essa soddisfa

$$AI = IA = A, \quad \forall A \in \mathcal{M}(n \times n),$$

e, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, si ha $Ix = x$. Inoltre $\det(I) = 1$.

Definizione 11.1 (Matrice inversa). Una matrice $A \in \mathcal{M}(n \times n)$ si dice *invertibile* se esiste $A^{-1} \in \mathcal{M}(n \times n)$ tale che

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

Se $A \in \mathcal{M}(2 \times 2)$ e

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix},$$

la condizione $AA^{-1} = I$ equivale ai due sistemi

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Entrambi devono ammettere un'unica soluzione. Per il teorema di Rouché–Capelli ciò accade se e solo se $\text{rank}(A) = 2$, ossia se e solo se $\det(A) \neq 0$.

Proposizione 11.2. Sia $A \in \mathcal{M}(n \times n)$. La matrice inversa A^{-1} esiste se e solo se $\det(A) \neq 0$.

Quando $\det(A) \neq 0$, l'inversa si calcola applicando l'algoritmo di Gauss–Jordan alla matrice a blocchi

$$(A \mid I) \longrightarrow (I \mid A^{-1}).$$

Esempio.

Sia

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poiché $\det(A) = 1 \neq 0$, la matrice è invertibile. Partiamo da

$$B = (A \mid I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Applicando le mosse

$$\begin{aligned} B_2 &\longrightarrow 2B_2 + B_1, & B &= \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right), \\ B_1 &\longrightarrow B_1 - B_2, & B &= \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right), \\ B_1 &\longrightarrow \frac{1}{2}B_1, & B &= \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right), \end{aligned}$$

otteniamo

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si verifica che $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

Esempio con parametro.

Consideriamo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & k+2 \\ 0 & 1 & k \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

La regola di Sarrus dà $\det(A) = 2k$. Pertanto A^{-1} esiste se e solo se $k \neq 0$. Per $k \neq 0$ applichiamo Gauss–Jordan a

$$B = (A \mid I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & k+2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Con le mosse

$$B_3 \longrightarrow 2B_3 - B_1, \quad B_3 \longrightarrow B_3 + 3B_2, \quad B_1 \longrightarrow B_1 - B_2,$$

si ottiene

$$B = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2k & -1 & 3 & 2 \end{array} \right).$$

Proseguendo con

$$B_1 \longrightarrow kB_1 - B_3, \quad B_2 \longrightarrow 2B_2 - B_3,$$

troviamo

$$B = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2k & 0 & 0 & k+1 & -k-3 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2k & -1 & 3 & 2 \end{array} \right).$$

Dividendo le righe per i rispettivi elementi principali, ricaviamo

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{k+1}{2k} & -\frac{k+3}{2k} & -\frac{1}{k} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2k} & \frac{3}{2k} & \frac{1}{k} \end{pmatrix}.$$

Definizione 11.3. Sia $A \in \mathcal{M}(n \times n)$. Un vettore $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ si dice *autovettore* di A con *autovalore* $\ell \in \mathbb{R}$ se $Av = \ell v$.

Poiché $\ell v = \ell Iv$, questa condizione equivale a

$$(A - \ell I)v = 0.$$

Esistono soluzioni non nulle se e solo se

$$\det(A - \ell I) = 0.$$

Gli autovalori sono dunque le radici del *polinomio caratteristico*

$$p_A(\ell) = \det(A - \ell I).$$

Esempio.
Per

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

si ha

$$\begin{aligned} p_A(\ell) &= \det \begin{pmatrix} 2-\ell & 1 \\ -1 & -\ell \end{pmatrix} \\ &= (2-\ell)(-\ell) + 1 = (\ell-1)^2. \end{aligned}$$

L'unico autovalore è $\ell = 1$. Gli autovettori corrispondenti sono le soluzioni non nulle di

$$(A - I)v = 0, \quad A - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Il sistema si riduce a $x + y = 0$ che ha soluzioni

$$W = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

In particolare,

$$A \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

12. ESEMPI CONCLUSIVI

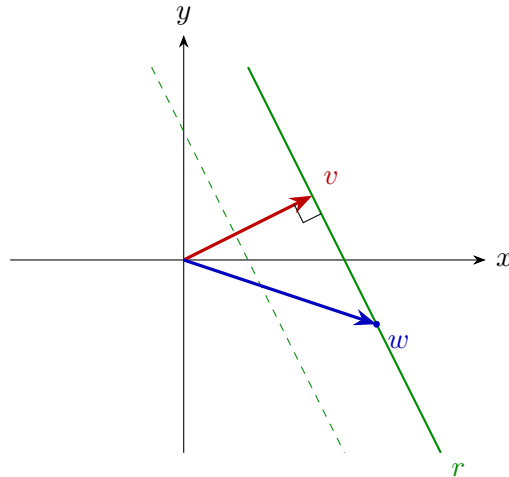
Esempio.

Troviamo la retta di $\mathbb{R}^2$ ortogonale al vettore

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e passante per il punto

$$w = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$



La retta r è un sottospazio affine di dimensione 1 e può essere scritta nella forma

$$r = u_1 + \text{Span}(u_2), \quad u_1, u_2 \in \mathbb{R}^2.$$

Possiamo scegliere come soluzione particolare il punto assegnato, ossia

$$u_1 = w = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Il vettore che genera la retta, $u_2 = (x, y)^T$, deve essere ortogonale a v ; dunque

$$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 2x + y = 0.$$

Una possibile scelta è

$$u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

e quindi

$$r = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Osserviamo che r non è un sottospazio vettoriale: infatti $0 \notin r$.

Troviamo ora la forma cartesiana della retta. Poiché il vettore $(2, 1)^T$ è ortogonale a r , la sua equazione è della forma

$$2x + y = c.$$

Imponendo il passaggio per $(3, -1)^T$, otteniamo

$$c = 2 \cdot 3 - 1 = 5.$$

Pertanto

$$r = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 2x + y = 5 \right\}.$$

Esempio.

Troviamo il piano di $\mathbb{R}^3$ ortogonale al vettore

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

e passante per il punto

$$w = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

L'equazione cartesiana del piano è della forma

$$ax + by + cz = d,$$

dove $(a, b, c)^T$ è un vettore ortogonale al piano. Possiamo dunque scegliere

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Imponendo il passaggio per w , si trova

$$d = 2 - 1 - 3 = -2.$$

Il piano cercato è quindi

$$\pi = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = -2 \right\}.$$

Per ricavarne una rappresentazione parametrica, poniamo

$$y = \lambda_1, \quad z = \lambda_2.$$

Allora $x = -2 - \lambda_1 + \lambda_2$ e pertanto

$$\pi = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

In alternativa possiamo usare come soluzione particolare proprio w . Cerchiamo due vettori linearmente indipendenti e ortogonali a v ; ad esempio

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si ottiene così anche la rappresentazione

$$\pi = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Parte 2. Analisi matematica

13. CARDINALITÀ DEGLI INSIEMI NUMERICI

Ricordiamo gli insiemi numerici

$$\mathbb{N}, \quad \mathbb{Z}, \quad \mathbb{Q}, \quad \mathbb{R}.$$

Due insiemi A e B hanno la stessa *cardinalità*, e scriviamo

$$\#A = \#B,$$

se esiste una corrispondenza biunivoca tra A e B .

Un primo fenomeno caratteristico degli insiemi infiniti è che un insieme può avere la stessa cardinalità di un suo sottoinsieme proprio. Per esempio, l'insieme dei numeri naturali dispari ha la stessa cardinalità di $\mathbb{N}$, mediante la corrispondenza

$$1 \longleftrightarrow 1, \quad 3 \longleftrightarrow 2, \quad 5 \longleftrightarrow 3, \quad \dots$$

data da

$$2n - 1 \longleftrightarrow n.$$

Anche $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ hanno la stessa cardinalità. Una possibile corrispondenza biunivoca $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ è

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n-1}{2}, & n \text{ dispari,} \\ -\frac{n}{2}, & n \text{ pari.} \end{cases}$$

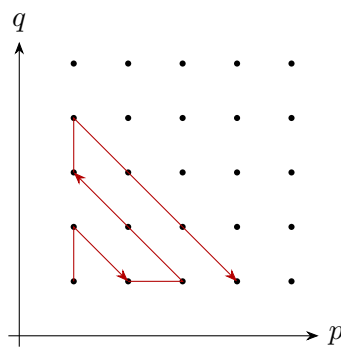
Essa enumera gli interi nel modo seguente:

$$1 \mapsto 0, \quad 2 \mapsto -1, \quad 3 \mapsto 1, \quad 4 \mapsto -2, \quad 5 \mapsto 2, \quad \dots$$

Pertanto

$$\#\mathbb{N} = \#\mathbb{Z}.$$

Anche $\mathbb{Q}$ è numerabile. Infatti ogni numero razionale può essere scritto come p/q , con $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$, e le coppie (p, q) possono essere ordinate percorrendo diagonalmente una griglia.



enumerazione per diagonali

Poiché nella griglia alcune frazioni rappresentano lo stesso numero, l'enumerazione contiene ripetizioni; eliminandole si ottiene comunque una enumerazione di $\mathbb{Q}$. Dunque

$$\#\mathbb{N} = \#\mathbb{Z} = \#\mathbb{Q}.$$

L'insieme $\mathbb{R}$, invece, non è numerabile. La sua cardinalità è strettamente maggiore di quella di $\mathbb{N}$ e vale

$$\#\mathbb{R} = 2^{\#\mathbb{N}}.$$

In conclusione,

$$\#\mathbb{N} = \#\mathbb{Z} = \#\mathbb{Q} < \#\mathbb{R}.$$

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA, UNIVERSITÀ DI PISA, LARGO BRUNO PONTECORVO 5, 56127 PISA
Email address: `claudio.bonanno@unipi.it`