Def $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, D dom naturale, $x_0\in D$ tale che $\exists\, \varepsilon>0$ per cui $(x_0-\varepsilon,\, x_0+\varepsilon)\subset D$.

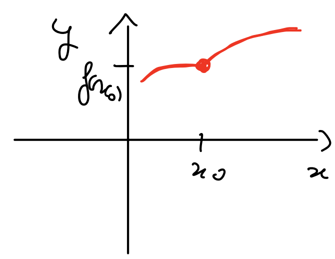
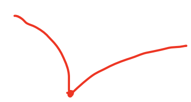
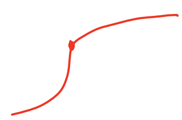
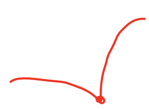
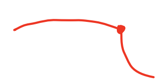
Si dice che f è derivabile in x_0 se esiste finito il $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, in questo caso si pone $f'(x_0):=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ e si chiama derivata di f in x_0.

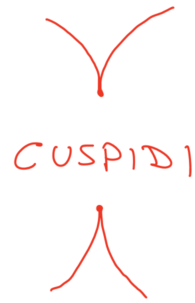
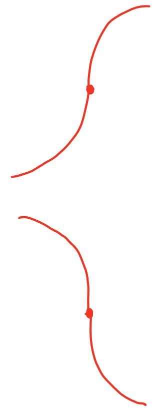
OSS Se f è derivabile in x_0 con derivata $f'(x_0)\in\mathbb{R}$ allora la retta tangente al grafico di f in x_0 è

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

(la retta passante per $(x_0, f(x_0))$ e con coefficiente angolare $f'(x_0)$)

Punti di non derivabilità

$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$	$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$	tipo di punto
$l_+\in\mathbb{R}$	$l_-\in\mathbb{R}$	$(l_+\neq l_-)$  ANGOLOSO
$l_+\in\mathbb{R}$	$-\infty$	 ANGOLOSO
$l_+\in\mathbb{R}$	$+\infty$	
$+\infty$	$l_-\in\mathbb{R}$	
$-\infty$	$l_-\in\mathbb{R}$	

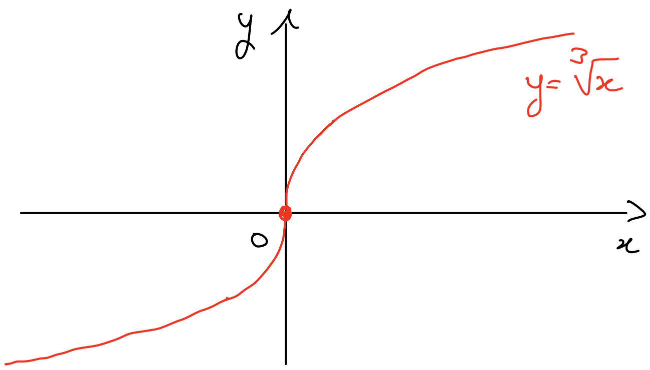
$+\infty$	$-\infty$	 CUSPIDI
$-\infty$	$+\infty$	
$+\infty$	$+\infty$	 TANGENTE VERTICALE
$-\infty$	$-\infty$	

<u>ES</u> $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $D = \mathbb{R}$, $x_0 = 0$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^{2/3}} = +\infty$$

$$\frac{1}{0^+}$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-\sqrt[3]{|x|}}{-|x|} = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{|x|^{2/3}} = +\infty$$

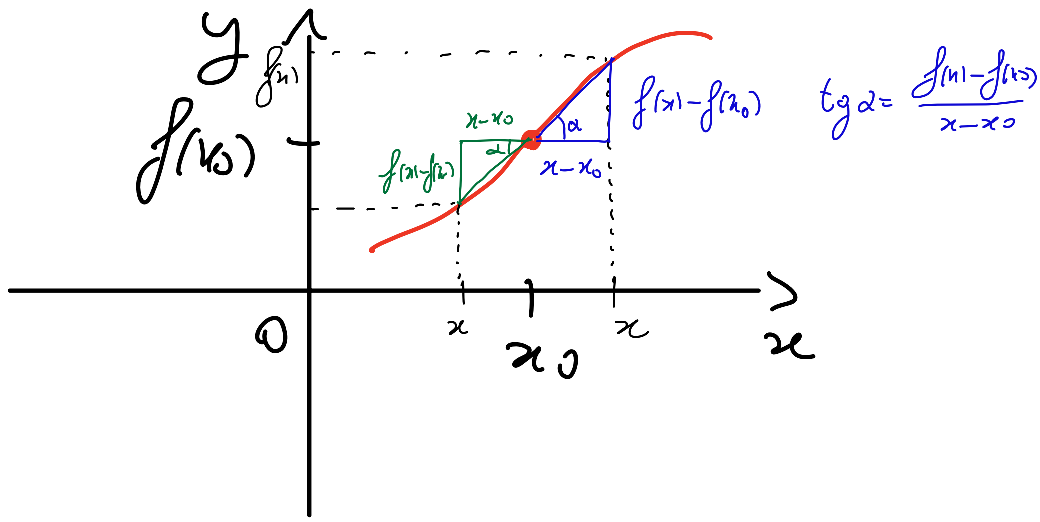


$f(0) = 0$

f non è derivabile in 0, dove ha tangente verticale.

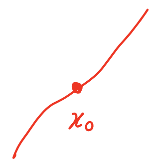
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{}$$

RAPPORTO INCREMENTALE

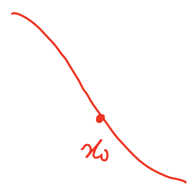


<u>Prop</u>

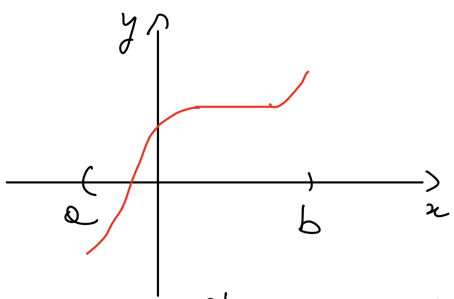
- Se $f'(x_0) > 0$ allora in un intorno di x_0
  $f(x) > f(x_0)$ per $x > x_0$
  $f(x) < f(x_0)$ per $x < x_0$



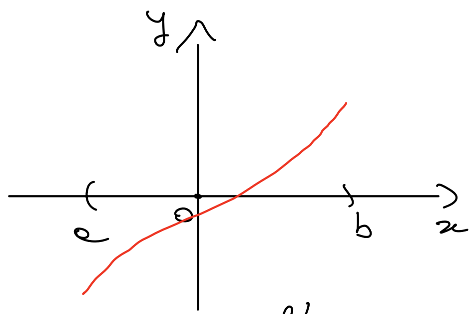
- Se $f'(x_0) < 0$ allora in un intorno di x_0
  $f(x) > f(x_0)$ per $x < x_0$
  $f(x) < f(x_0)$ per $x > x_0$



- Se $f'(x) \geq 0$ $\forall x \in (a,b) \subset D$ allora f è crescente in (a,b)
  Se $f'(x) > 0$ $\forall x \in (a,b) \subset D$ " f è strettamente crescente in (a,b)



$f'(x) \geq 0$ in (a,b)



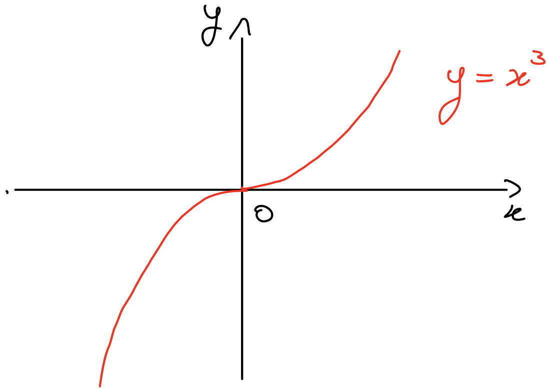
$f'(x) > 0$ in (a,b)

f è crescente in (a,b) $\begin{cases} \text{per ogni } x_1, x_2 \in (a,b) \\ \text{con } x_1 < x_2 \text{ allora} \\ f(x_1) \leq f(x_2) \end{cases}$

f è strettamente crescente in (a,b)
$\begin{cases} \text{per ogni } x_1, x_2 \in (a,b) \text{ con } x_1 < x_2 \\ \text{si ha } f(x_1) < f(x_2) \end{cases}$

OSS $f(x) = x^3$, $D = \mathbb{R}$, f è derivabile in $\mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x_0) = 0$ se e solo se $x_0 = 0$



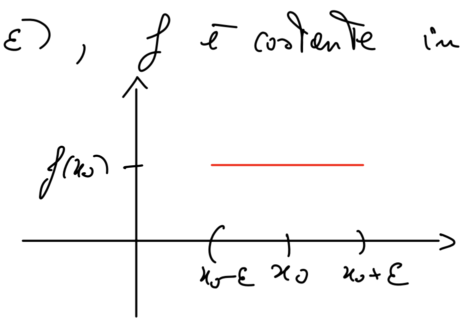
- Se $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a,b) \subset D$ allora f è decrescente in (a,b)

  Se $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (a,b) \subset D$ allora f è strettamente decrescente in (a,b).

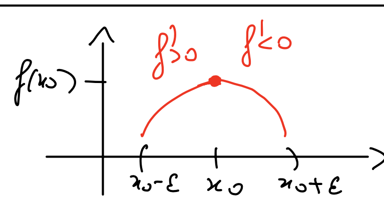
Def Se f è derivabile in x_0 e $f'(x_0) = 0$, x_0 si chiama punto critico.

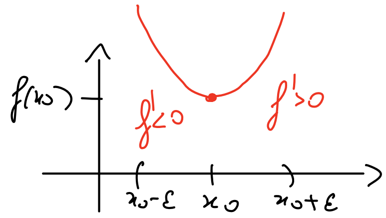
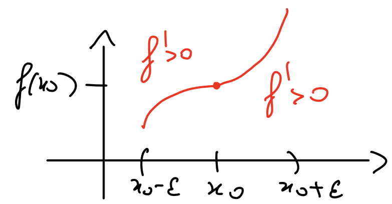
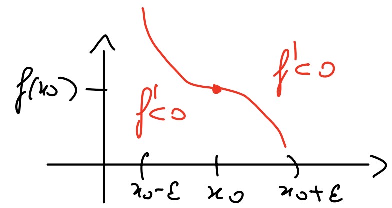
Prop Sia f derivabile in (a,b) e $x_0 \in (a,b)$ sia punto critico. Allora:

– se $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, f è costante in $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$



– se $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \setminus \{x_0\}$, allora

$f'(x)$ in $(x_0 - \varepsilon, x_0)$	$f'(x)$ in $(x_0, x_0 + \varepsilon)$	x_0
> 0	< 0	

		PUNTO DI MAX LOCALE
< 0	> 0	 PUNTO DI MIN LOCALE
> 0	> 0	
< 0	< 0	 PUNTO DI FLESSO

Prop Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, D dom naturale, se x_0 è un punto di massimo locale o di minimo locale allora x_0 è:

- un punto critico se f è derivabile in x_0;
- un punto angoloso o una cuspide se f non è derivabile in x_0;
- un estremo di D.

Calcolo delle derivate

- $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $D = (0, +\infty)$

$$f'(x) = \begin{cases} \alpha \cdot x^{\alpha-1}, & \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0, & \alpha = 0 \end{cases}$$

- $f(x) = e^x$, $D = \mathbb{R}$, $f'(x) = e^x$
- $f(x) = \log x$, $D = (0, +\infty)$, $f'(x) = \frac{1}{x}$

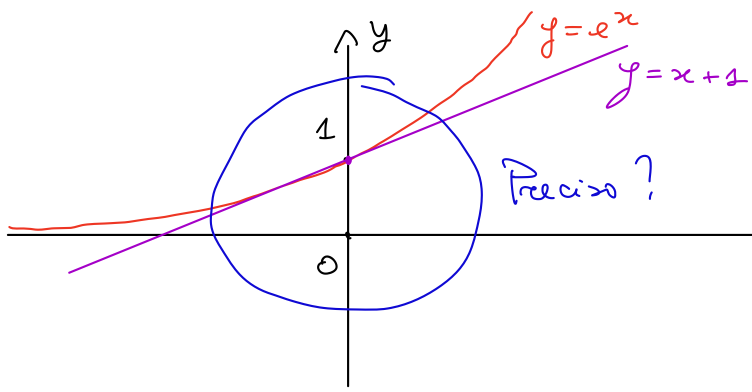
- $f(x) = \sin x$, $D = \mathbb{R}$, $f'(x) = \cos x$
- $f(x) = \cos x$, $D = \mathbb{R}$, $f'(x) = -\sin x$
- $f(x) = \operatorname{tg} x$, $D = \mathbb{R} \setminus \{ \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \}$, $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

<u>Regole</u> $[f'(x) = Df(x)]$

- $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$, $c \in \mathbb{R}$
- $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$
- $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- $\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) g(x) - f(x) g'(x)}{[g(x)]^2}$
- $((f \circ g)(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

<u>ES</u> Quante soluzioni ha l'equazione $e^x = x+1$?

<u>Primo metodo</u>. $f(x) = e^x$, $g(x) = x+1$



Retta tangente a e^x in $x_0 = 0$

è $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$y = 1 + 1 \cdot (x - 0)$

$y = x + 1$

Quante soluzioni ho di $f(x) = g(x)$?

<u>Secondo metodo</u>. $e^x = x+1 \iff e^x - x = 1$.

$f(x) = e^x - x$, quante soluzioni ho di $f(x) = 1$?

$D = \mathbb{R}$, $-\infty \longrightarrow +\infty$

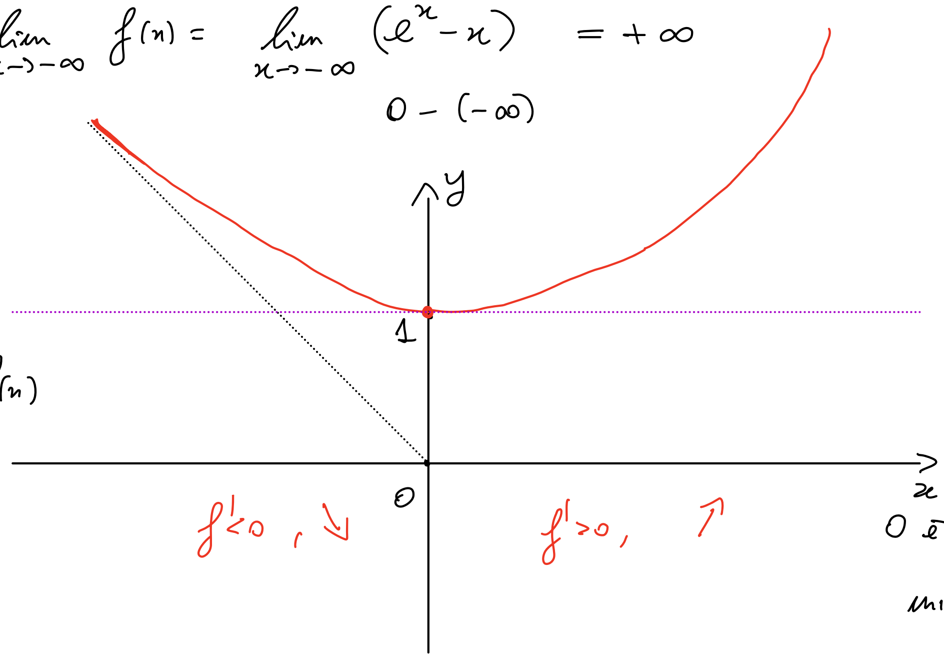
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \underbrace{(e^x - x)}_{+\infty - \infty} = \lim_{x \to +\infty} \underbrace{e^x \left(1 - \frac{x}{e^x}\right)}_{+\infty \cdot 1} = +\infty$$

(usiamo che $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^k}{e^x} = 0^+$ per ogni $k\in\mathbb{N}$)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (e^x - x) = +\infty$$
$$0 - (-\infty)$$

1 è il minimo di $f(x)$

$\mathrm{Im}\, f = [1,+\infty)$



$f(0) = e^0 - 0 = 1$

0 è un punto di minimo globale

Asintoto a $+\infty$? $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - x}{x} = +\infty$, NO

Asintoto a $-\infty$? $\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - x}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{e^x}{x} - 1\right) = -1 = a$

$$\frac{0}{-\infty} - 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} [f(x) - ax] = \lim_{x\to-\infty} (e^x - x - (-x)) = \lim_{x\to-\infty} e^x = 0 = b$$

Asintoto a $-\infty$ è $y = -x = ax+b$

Continuità. f è continua in ogni $x_0 \in D$ (perché somma di funzioni continue)

Derivabilità. e^x è derivabile $\forall x\in\mathbb{R}$

x è derivabile $\forall x \in \mathbb{R}$

Quindi $f(x) = e^x - x$ è derivabile $\forall x\in\mathbb{R}$

$$f'(x) = (e^x - x)' = (e^x)' + (-x)' = e^x + (-1)\cdot 1 \cdot x^{1-1}$$
$$= e^x - 1$$

$$f'(x) \begin{cases} >0 & \text{se } x>0 \\ =0 & \text{se } x=0 \\ <0 & \text{se } x<0 \end{cases}$$