- X v.a. con legge $\mathbb{P}_X$

  Legge di $Y = h(X)$

- X, Y v.a., considero $X+Y$

$$\begin{tikzcd}
(\Omega, \mathbb{P}) \arrow[r, "X"] \arrow[rr, bend right, "Y"'] & (\overset{V(X)}{\cancel{\mathbb{R}}}, \mathbb{P}_X) \arrow[r, "h"] & (\mathbb{R}, \mathbb{P}_Y)
\end{tikzcd}$$

- X v.a. discreta

<u>ES</u> X v.a. discreta con $p_X(-1) = 1/3$, $p_X(+1) = \frac{2}{3}$

- $Y = (X+1)^2$, Y assume valori in $\{0, 4\}$

$$p_Y(0) = \mathbb{P}(Y=0) = \mathbb{P}(X=-1) = p_X(-1) = 1/3$$

$$p_Y(4) = \mathbb{P}(Y=4) \underset{(X+1)^2=4}{=} \mathbb{P}(X=+1) = p_X(+1) = 2/3$$

- $Y = X^2$, Y assume valori in $\{+1\}$

$$p_Y(+1) = \mathbb{P}(Y=+1) = \mathbb{P}(X^2=+1) = \mathbb{P}(X=-1) +$$

$$+ \mathbb{P}(X=+1) = p_X(-1) + p_X(+1) = 1$$

- X v.a. con densità $f_X(x)$

Sia $V(X) \subset \mathbb{R}$ l'insieme dei valori assunti da X

<u>Prop</u> Sia X v.a. con densità $f_X(x)$ che sia maggiore di 0 su $V(X)$. Sia $h : A \to B = h(A)$ con $A \subseteq V(X)$ intervallo, che sia continua, iniettiva e con inversa derivabile. La v.a. $Y = h(X)$ ha densità

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(h^{-1}(y)) \left| \dfrac{d h^{-1}}{dy}(y) \right| , & y \in B \subset h(V(X)) \\ 0 , & \text{alt.} \end{cases}$$

<u>dim</u>

Dato B, $\mathbb{P}_Y(B)$ con $Y = h(X) = h \circ X$.

$$\mathbb{P}_Y(B) = \mathbb{P}(Y \in B) = \int_B f_Y(y)\, dy$$

$$= \mathbb{P}(h(X) \in B) = \mathbb{P}(X \in h^{-1}(B)) =$$

$$= \int_{h^{-1}(B)} f_X(x)\, dx \underset{x = h^{-1}(y)}{=} \int_B f_X(h^{-1}(y)) \left| \frac{d h^{-1}}{dy}(y) \right| dy$$

$\square$

ESEMPIO $\quad X \sim N(0,1)$

Dati $\sigma > 0$, $m \in \mathbb{R}$, $\quad Y = \sigma X + m$

Densità di Y?

X ha densità $\quad \varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

X assume valori $= \mathbb{R}$

$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad h(x) = \sigma x + m$, $\quad h(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

- continua ✓
- iniettiva su $\mathbb{R}$ ✓
- derivabile ✓

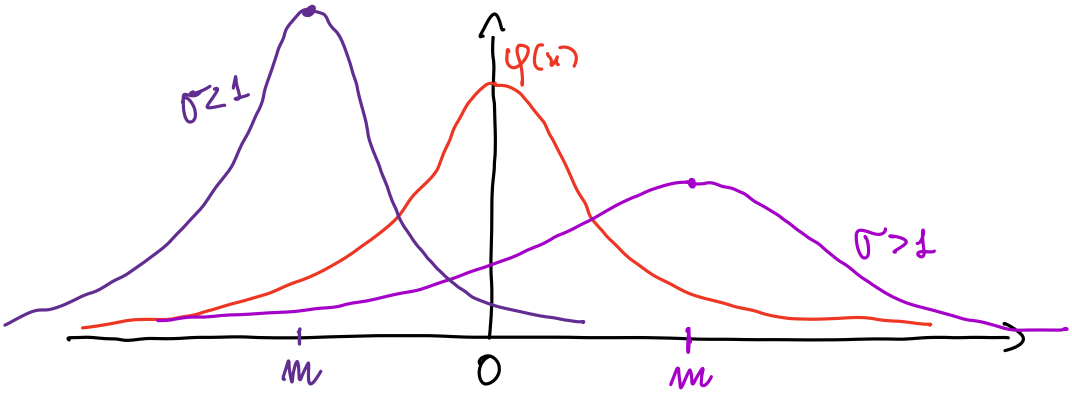
$$y = h(x) = \sigma x + m \implies x = h^{-1}(y) = \frac{y - m}{\sigma}$$

$$\left| \frac{d h^{-1}}{dy}(y) \right| = \frac{1}{\sigma}$$

Allora

$$f_Y(y) = \varphi(h^{-1}(y)) \left| \frac{d h^{-1}}{dy}(y) \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}} \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

$$Y \sim N(m, \sigma^2)$$



ESERCIZIO $\quad Y \sim N(m, \sigma^2)$

- Trovare una formula per il β-quantile r_β di Y in funzione di q_β (β-quantile di $N(0,1)$).
- Determinare $r_{0.65}$ e $r_{0.13}$.

Sia $X \sim N(0,1)$, $Y = \sigma X + m$.

Il β-quantile r_β è l'unica soluzione di

$$F_Y(r_\beta) = \beta.$$

$$\beta = F_Y(r_\beta) = \mathbb{P}(Y \le r_\beta) = \mathbb{P}(\sigma X + m \le r_\beta) =$$
$$= \mathbb{P}\left(X \le \frac{r_\beta - m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{r_\beta - m}{\sigma}\right) = \Phi(q_\beta)$$

$$\Rightarrow \quad r_\beta = \sigma q_\beta + m$$

- $r_{0.65} = \sigma q_{0.65} + m$

$q_{0.65}$ è l'unico valore reale in cui Φ vale 0.65

$$\Phi(0.38) \sim 0.64803 \qquad \Phi(0.39) \sim 0.65173$$

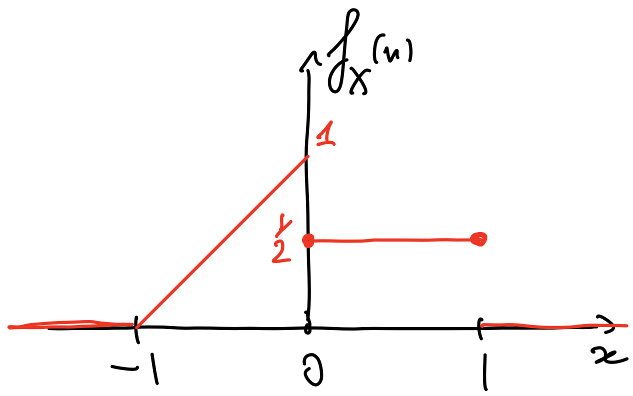
$$\Rightarrow \quad q_{0.65} \sim 0.385$$

- $r_{0.13} = \sigma q_{0.13} + m$, $\quad q_{1-\beta} = -q_\beta$

$$0.13 = 1 - 0.87 \qquad q_{0.13} = -q_{0.87} \sim -1.125$$

<u>ES</u> X v.a. con densità

$$f_X(x) = \begin{cases} x+1 \,, & -1 \le x < 0 \\ 1/2 \,, & 0 \le x \le 1 \\ 0 \,, & \text{alt.} \end{cases}$$



X assume valori in

$$[-1, +1] = V(X)$$

- $Y = e^X$ $\qquad h(x) = e^x$, continua, deriv. e iniettiva su $[-1,1]$

$$h([-1,1]) = \left[\frac{1}{e}, e\right] = \text{valori assunti da } Y$$

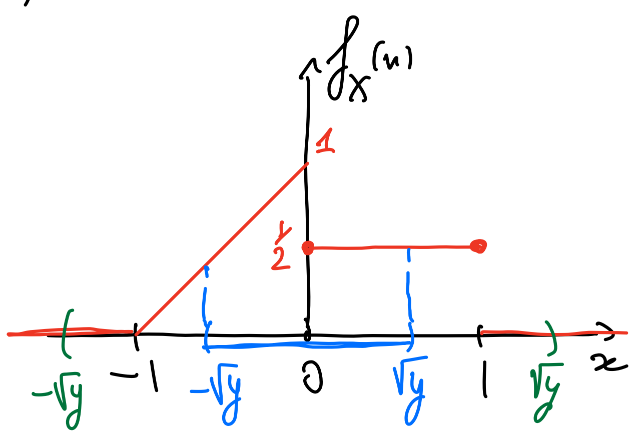
$$y = h(x) = e^x \Rightarrow x = h^{-1}(y) = \log y \,, \quad \left|\frac{dh^{-1}}{dy}(y)\right| = \frac{1}{y}$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} f_X(\log y)\cdot\frac{1}{y} \,, & y \in [\frac{1}{e}, e] = h([-1,1]) \\ 0 \,, & \text{alt.} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{y}(1+\log y) \,, & y \in h([-1,0)) = [\frac{1}{e}, 1) \\ \frac{1}{y}\cdot\frac{1}{2} \,, & y \in h([0,1]) = [1, e] \\ 0 \,, & \text{alt.} \end{cases}$$

- $Y = X^2$ $\qquad h(x) = x^2$, h non è iniettiva su $[-1,1]$.

Calcoliamo F_Y.



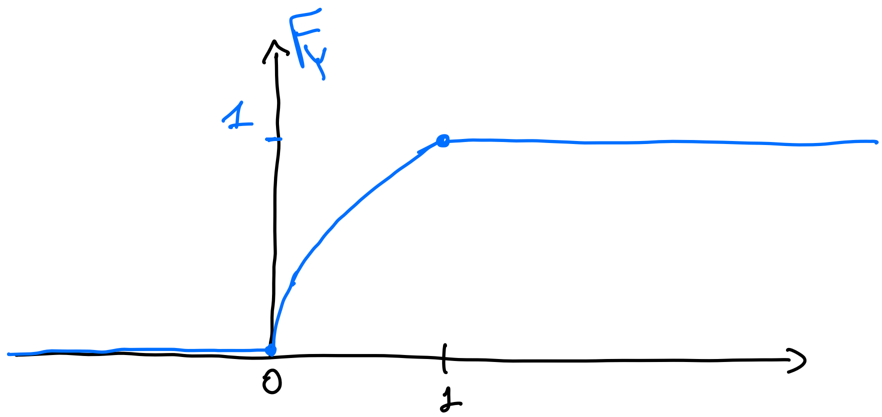
$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \le y) = \mathbb{P}(X^2 \le y) =$$

$$= \begin{cases} \mathbb{P}(-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}) \,, & y \ge 0 \\ 0 \,, & y < 0 \end{cases}$$

$y \geq 0, \quad \mathbb{P}(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f_X(x)\, dx =$

$$= \begin{cases} \int_{-\sqrt{y}}^{0} (x+1)\, dx + \int_{0}^{\sqrt{y}} \frac{1}{2}\, dx, & 0 \leq y \leq 1 \\ \int_{-\sqrt{y}}^{-1} 0\, dx + \int_{-1}^{0} (x+1)\, dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{2}\, dx + \int_{1}^{\sqrt{y}} 0\, dx, & y \geq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)\Big|_{-\sqrt{y}}^{0} + \frac{1}{2}x\Big|_{0}^{\sqrt{y}} = -\frac{1}{2}y + \sqrt{y} + \frac{1}{2}\sqrt{y} = -\frac{1}{2}y + \frac{3}{2}\sqrt{y} & 0 \leq y \leq 1 \\ 1, & y \geq 1 \end{cases}$$



$f_Y(y) = F_Y'(y)$ dove esiste

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{4}\frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{1}{2}, & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{alt.} \end{cases}$$

Date $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$, si considera

$$(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$$

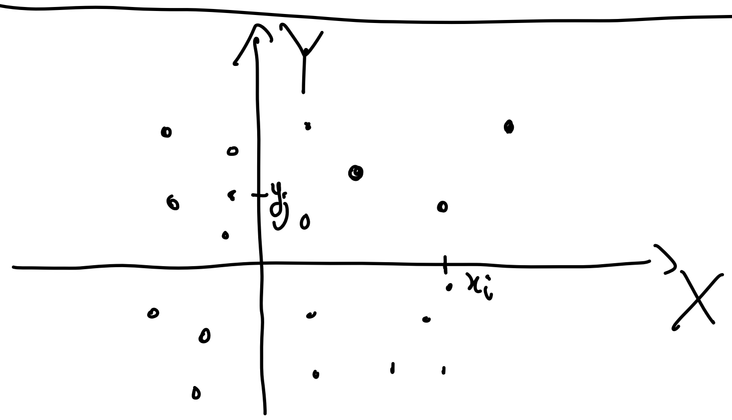
• (X,Y) è v.a. discreta se assume valori in un insieme finito o numerabile, e si chiama <u>legge congiunta di (X,Y)</u>, $\mathbb{P}_{X,Y}$, quella determinata dalla funzione di massa

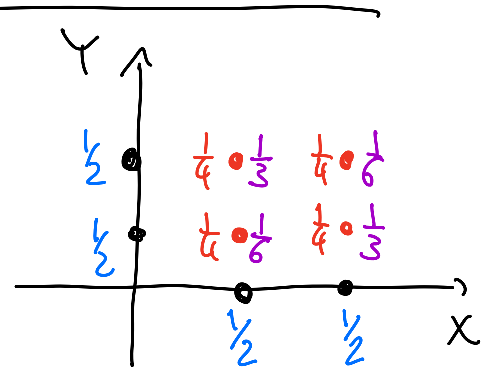
$$p_{X,Y}(x_i,y_j) = \mathbb{P}(X=x_i, Y=y_j) =$$
$$= \mathbb{P}(\{X=x_i\} \cap \{Y=y_j\})$$

• (X,Y) è v.a. con densità se esiste una funzione $f_{X,Y}(x,y)$ t.c. $f_{X,Y}(x,y) \geq 0 \ \forall (x,y)$, sia integrabile, e $\iint_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = 1$.

La legge congiunta

$$\mathbb{P}_{X,Y}(A) = \iint_A f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$





Prop • (X, Y) v.a. discreta allora

$$P_X(x_i) = \sum_{y_j} P_{X,Y}(x_i, y_j) \ , \quad P_Y(y_j) = \sum_{x_i} P_{X,Y}(x_i, y_j)$$

(leggi marginali)

• (X, Y) v.a. con densità allora

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dy \ , \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dx$$

(densità marginali)

Def Due v.a. X, Y a valori reali si dicono <u>INDIPENDENTI</u> se $\forall A, B \subset \mathbb{R}$ gli eventi (in Ω) $X^{-1}(A)$ e $Y^{-1}(B)$ sono indipendenti.

$$\mathbb{P}(X^{-1}(A) \cap Y^{-1}(B)) = \mathbb{P}(X^{-1}(A))\, \mathbb{P}(Y^{-1}(B))$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A)\, \mathbb{P}(Y \in B)$$

Prop Se X e Y sono v.a. indipendenti allora

$$P_{X,Y}(x_i, y_j) = P_X(x_i)\, P_Y(y_j) \quad \forall x_i, y_j \ \text{(discreta)}$$

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y) \quad \forall x,y \quad \text{(con densità)}$$

e viceversa.