Probabilità

Ω UNIVERSO (spazio fondamentale, spazio esiti, ...)

ES $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ lancio di un dado

$\Omega = \{(1,1), (1,2), \dots, (1,6), (2,1), \dots, (2,6), \dots, (6,6)\}$
lancio di due dadi

$\mathcal{P}(\Omega)$ = insieme delle parti

ES $A \subset \Omega = \{$ numero pari $\}$ lancio di un dado
EVENTO

Def Una famiglia $\mathcal{A}$ di sottoinsiemi di Ω si chiama ALGEBRA DI PARTI se:

(i) $\emptyset, \Omega \in \mathcal{A}$

(ii) se $A \in \mathcal{A}$ allora $A^c := \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$

(iii) se $A, B \in \mathcal{A}$ allora $A \cup B \in \mathcal{A}$

Oss Se $A, B \in \mathcal{A}$ allora $A \cap B \in \mathcal{A}$. Infatti

$$A \cap B = (\Omega \setminus A^c) \cap (\Omega \setminus B^c) = \Omega \setminus (A^c \cup B^c)$$

Def Se $A, B \in \mathcal{A}$ e $A \cap B = \emptyset$, si dice che A e B sono INCOMPATIBILI.

$\emptyset$ = EVENTO IMPOSSIBILE

Def Dati Ω e $\mathcal{A}$ un'algebra di parti, una PROBABILITÀ (FINITAMENTE ADDITIVA) è
$\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0,1]$ tale che:

(i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;

(ii) se $A, B \in \mathcal{A}$ incompatibili ($A \cap B = \emptyset$)
allora $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

Def Se $A \in \mathcal{A}$ t.c. $\mathbb{P}(A) = 0$, A si dice TRASCURABILE. ($\underset{\Leftarrow}{\not\Rightarrow}$ IMPOSSIBILE)

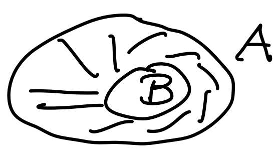
Se $A \in \mathcal{A}$ t.c. $\mathbb{P}(A) = 1$, A si dice (QUASI) CERTO.

Prop (i) Se $A \in \mathcal{A}$, allora $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$

$$\left(\begin{array}{c} \underline{\text{dim}} \quad \Omega = A \cup A^c, \quad A \cap A^c = \emptyset \\ 1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c) \end{array} \right)$$

(ii) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

(iii) se $A, B \in \mathcal{A}$ e $B \subset A$ allora
$$\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)$$



(iv) se $A, B \in \mathcal{A}$ allora
$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

(v) se $A, B, C \in \mathcal{A}$ allora

$$\mathbb{P}(A\cup B\cup C) = \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(C)-\mathbb{P}(A\cap B)$$
$$-\mathbb{P}(A\cap C)-\mathbb{P}(B\cap C)+\mathbb{P}(A\cap B\cap C)$$

<u>Ω spazio finito</u> $\quad \Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$

$$\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$$

Per specificare $\mathbb{P}: \mathcal{A} \to [0,1]$ è sufficiente determinare $\mathbb{P}(\underbrace{\{\omega_i\}}_{\text{eventi elementari}}) \quad \forall \omega_i \in \Omega$

Siano $p_i := \mathbb{P}(\{\omega_i\}) \quad \forall i = 1,\dots,N \quad$ t.c. $p_i \geq 0 \quad \forall i$

e $\sum_{i=1}^{N} p_i = 1$.

Se $A \in \mathcal{A}$, $\quad \mathbb{P}(A) = \sum_{\omega_i \in A} \mathbb{P}(\{\omega_i\})$.

<u>ES</u> <u>Distribuzione uniforme</u> $\quad p_i = \frac{1}{N} = \frac{1}{\#\Omega} \quad \forall i = 1,\dots,N$

In questo caso $\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$

<u>Esercizi</u>

1. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ lancio di un dado
Calcolare la probabilità di ottenere un numero pari sapendo che $\mathbb{P}(\{2n\}) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(\{n\}) \quad \forall n = 1,2,3$ e $\mathbb{P}(\{n+2\}) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(\{n\})$ per $n = 1, 3$.

$A = \{2,4,6\} \qquad \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{2\}) + \mathbb{P}(\{4\}) + \mathbb{P}(\{6\})$

$\alpha = \mathbb{P}(\{1\}) \geq 0 \implies \mathbb{P}(\{2\}) = \frac{1}{2}\alpha, \ \mathbb{P}(\{3\}) = \frac{1}{2}\alpha$

$\mathbb{P}(\{4\}) = \frac{1}{4}\alpha, \ \mathbb{P}(\{5\}) = \frac{1}{4}\alpha$

$\mathbb{P}(\{6\}) = \frac{1}{4}\alpha$

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \sum_{i=1}^{6} \mathbb{P}(\{i\}) = \alpha + \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{4}\alpha + \frac{1}{4}\alpha + \frac{1}{4}\alpha$$
$$= \alpha\left(2 + \tfrac{3}{4}\right) = \frac{11}{4}\alpha$$

$$\implies \alpha = \frac{4}{11}$$

$$\implies \mathbb{P}(A) = \frac{2}{11} + \frac{1}{11} + \frac{1}{11} = \frac{4}{11}$$

2. Calcolare la prob. che nel lancio di un dado esce:

(a) un multiplo di 2 oppure un multiplo di 3;

(b) un multiplo di 2 maggiore di 3.

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad p_i = \frac{1}{6}$

(a) $A = \{2,4,6\}, \quad B = \{3,6\}$

$\{$un multiplo di 2 oppure un multiplo di 3$\} = A \cup B$

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(\{2,3,4,6\}) = \frac{4}{6}$$

$$= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) =$$

$$= \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$$

(b) $A = \{2,4,6\}$, $B = \{4,5,6\}$

$\{$un multiplo di 2 maggiore di 3$\} = A \cap B$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\{4,6\}) = \frac{2}{6}$$

---

3. Calcolare la prob. che lanciando un dado due volte si ottenga "1" almeno una volta.

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),(2,1),\ldots(2,6),(3,1),\ldots,(3,6),\ldots \ldots (6,6)\}.$$

$\#\Omega = 36$ $\qquad p_i = \frac{1}{36} \quad \forall\, i.$

- $A = \{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),(2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(6,1)\}$

$\#A = 11$, $\qquad \mathbb{P}(A) = \frac{11}{36}$

- $A^c = \{$ lanci in cui non esce "1" $\} =$

$= \{$ applicazioni da $\underbrace{\{1,2\}}_{k}$ a $\underbrace{\{2,3,4,5,6\}}_{n}$ $\}$

$$\# A^c = n^k = 5^2 = 25 \qquad \mathbb{P}(A^c) = \frac{25}{36}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$$

---

4. Calcolare la prob. che lanciando un dado tre volte esce "5" esattamente una volta.

$$\Omega = \{(1,1,1), \dots, (6,6,6)\} \qquad \# \Omega = 6^3, \; p_i = \frac{1}{6^3}$$

$$A = \{(5,*,*), (*,5,*), (*,*,5) \;/\; * \in \{1,2,3,4,6\}\}$$

$$\# A = 3 \cdot 5^2 \qquad \mathbb{P}(A) = \frac{3 \cdot 5^2}{6^3}$$

<u>OSS</u> $\frac{1}{6^3}\left(5^3 + 3 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 1\right) = \frac{(5+1)^3}{6^3} = 1.$

<u>OSS</u> n lanci, "5" esce esattamente k volte

$$\# \Omega = 6^n, \quad \# A_k = \binom{n}{k} 5^{n-k}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 5^{n-k} \cdot 1^k = (5+1)^n$$

<u>OSS</u> $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ Insiemi di cardinalità k su n elementi.

---

4. Sia data un'urna contenente 10 palline, di cui 6 rosse e 4 blu.
Calcolare la prob. che estraendo tre palline si ottengano:

(a) 3 palline blu

(b) 2 palline blu, 1 rossa.

$\Omega = \{ \text{possibili estrazioni} \}, \quad \# \Omega = \binom{10}{3}$

(a) $A = \{ \text{estraz. di palline solo blu} \} \quad \# A = \binom{4}{3}$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{4 \cdot 3! \cdot 7!}{10!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{1}{30}$$

(b) $A = \{ \text{estraz. di 2 blu e 1 rossa} \}$

$$\# A = \binom{4}{2} \cdot \binom{6}{1} \qquad \mathbb{P}(A) = \frac{\binom{4}{2}\binom{6}{1}}{\binom{10}{3}}$$

---

5. Avendo le lettere $\{A, A, B, C, R\}$, ed estraendole in ordine una alla volta, calcolare la prob. di ottenere "BARCA".

$\Omega = \{ AABCR, ABACR, \dots, BARCA, \dots, RCBAA \}.$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{\# \Omega} = \frac{1}{5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{1}{60}$$

$n \geq k$

$$\# \Omega = \frac{\# \{ \text{applic. iniettive da } \overbrace{\{1,2,3,4,5\}}^{k} \text{ a } \overbrace{\{A', A'', B, C, R\}}^{n} \}}{2!} =$$

$$= \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{2!} = \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{2!} = \frac{5!}{2!}$$

<u>OSS</u> $\{A, A, B, B, C\}$

$$\# \Omega = \frac{5!}{2! \cdot 2!}$$