Esercizi di riepilogo su Analisi Matematica e Statistica

1. Determinare il dominio naturale D delle seguenti funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$(a)\ f(x) = \log(1 - e^x) \qquad (b)\ f(x) = \frac{\sin(x^2+1)}{2x^3+16} \qquad (c)\ f(x) = \log(1+\cos x)$$

$$(d)\ f(x) = \sqrt{x^2+x-6} \qquad (e)\ f(x) = \log\left(\sqrt{2} - \sqrt{x^4+x^2}\right) \qquad (f)\ f(x) = \frac{1}{\log(|x-1|)}$$

2. Determinare l'insieme C dei punti nel quale le seguenti funzioni sono continue:

$$(a)\ f(x) = \begin{cases} e^x\,, & \text{se } x \geq 0; \\ x+1\,, & \text{se } x < 0. \end{cases} \qquad (b)\ f(x) = \sin(1+|x|) \qquad (c)\ f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}}\,, & \text{se } x \neq 0; \\ 0\,, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

$$(d)\ f(x) = \begin{cases} \log(1+x)\,, & \text{se } x \neq 0; \\ 1\,, & \text{se } x = 0. \end{cases} \qquad (e)\ f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}\,, & \text{se } x > 0; \\ -1\,, & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

3. Classificare le discontinuità trovate nell'esercizio 2.

4. Trovare gli eventuali asintoti orizzontali o obliqui a $+\infty$ per le seguenti funzioni:

$$(a)\ f(x) = \frac{x^4+x^3}{2x^3+x^2} \qquad (b)\ f(x) = x + x\,\log\left(1+\frac{1}{x}\right) \qquad (c)\ f(x) = \frac{\sqrt{x^3+1}}{x}$$

$$(d)\ f(x) = \log(1+e^x) \qquad (e)\ f(x) = \log\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)$$

5. Disegnare il grafico delle seguenti funzioni:

$$(a)\ f(x) = |x+1| \qquad (b)\ f(x) = \sin(2x) \qquad (c)\ f(x) = \log\left(1+x^2\right)$$

$$(d)\ f(x) = e^{|x|} \qquad (e)\ f(x) = \sqrt[4]{x-2} \qquad (f)\ f(x) = x^3+x-1$$

6. Disegnare il grafico di una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con dominio naturale $D = \mathbb{R}$, tale che $f(0) = 0$ e la sua derivata sia

$$f'(x) = \begin{cases} x-1\,, & \text{se } x \in [1,+\infty); \\ 0\,, & \text{se } x \in [0,1); \\ -3x^2\,, & \text{se } x \in [-1,0); \\ -x-2\,, & \text{se } x \in (-\infty,-1). \end{cases}$$

Discutere l'esistenza di punti di massimo locale o di minimo locale.

7. Un campione statistico x contiene i seguenti dati

$$x = \{2,-1,1,0,2,3,1,0,-1,1,2,2,1,2,0\}$$

Rappresentare il campione con un istogramma, e calcolare media, varianza e scarto quadratico medio del campione.

8. Si lancino contemporaneamente due dadi onesti a sei facce numerati da 1 a 6 e si sommino gli esiti, ottenendo quindi un numero tra 2 e 12. Si consideri la variabile aleatoria X che, indicando con ω la somma degli esiti, è definita da

$$X(\omega) = \begin{cases} 1\,, & \text{se } \omega \in \{2\}; \\ 2\,, & \text{se } \omega \in \{3, 4, 5\}; \\ 3\,, & \text{se } \omega \in \{6, 7, 8\}; \\ 4\,, & \text{se } \omega \in \{9, 10, 11\}; \\ 5\,, & \text{se } \omega \in \{12\}. \end{cases}$$

Calcolare la legge di X, e le sue media, varianza e scarto quadratico medio.

9. Scrivere la densità di una variabile aleatoria gaussiana con media $m = 1$ e varianza $\sigma^2 = 5$.

Soluzioni

1. (a) $D = (-\infty, 0)$; (b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$; (c) $D = \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$;
(d) $D = (-\infty, -3] \cup [2, +\infty)$; (e) $D = (-1, 1)$; (f) $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2\}$.

2. (a) $C = \mathbb{R}$; (b) $C = \mathbb{R}$; (c) $C = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; (d) $C = (-1, +\infty) \setminus \{0\}$; (e) $C = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

3. (c) Seconda specie. (d) Eliminabile. (e) Prima specie.

4. (a) $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$; (b) $y = x + 1$; (c) non esiste; (d) $y = x$; (e) $y = 0$.

5. Usare ad esempio il sito https://www.desmos.com/calculator?lang=it

6. La funzione $f(x)$ da disegnare (ad esempio sul sito indicato sopra) è

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}\,, & \text{se } x \in [1, +\infty); \\ 0\,, & \text{se } x \in [0, 1); \\ -x^3\,, & \text{se } x \in [-1, 0); \\ -\frac{1}{2}x^2 - 2x - \frac{1}{2}\,, & \text{se } x \in (-\infty, -1). \end{cases}$$

7. $\bar{x} = 1$; $var(x) = 1,33$; $\sigma(x) = 1,15$.

8. La legge di X è

$$p(1) = \frac{1}{36}\,, \quad p(2) = \frac{9}{36}\,, \quad p(3) = \frac{16}{36}\,, \quad p(4) = \frac{9}{36}\,, \quad p(5) = \frac{1}{36}\,.$$

$E[X] = 3$; $var(X) = 0,72$; $\sigma(X) = 0,85$.

9. La densità di $N(1, 5)$ è

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{10\pi}}\, e^{-\frac{(x-1)^2}{10}}$$