

Elementi di Matematica e Statistica
Corso di Laurea in Tecniche per le Costruzioni Civili e la Gestione del Territorio
Compito del 30-06-2026

Esercizio 1. Determinare il dominio naturale D della funzione

$$f(x) = \sin\left(\sqrt{\frac{x-1}{x^4}}\right)$$

e dire come si comporta la funzione agli estremi di D .

Esercizio 2. Trovare gli eventuali asintoti orizzontali o obliqui a $+\infty$ per la funzione

$$f(x) = \frac{3x^3 + 2}{x^2 + 4x}$$

Esercizio 3. Determinare l'insieme C dei punti nel quale la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{x-1}{x^4}}, & \text{se } x \geq 1; \\ 0, & \text{se } x < 1. \end{cases}$$

è continua, e classificare le eventuali discontinuità.

Esercizio 4. Risolvere con il metodo grafico la disequazione

$$e^x + 4x \leq 1$$

Esercizio 5. Un campione statistico x contiene i seguenti dati

$$x = \{-1, -1, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 4\}$$

Rappresentare il campione con un istogramma, e calcolare media e varianza del campione.

Esercizio 6. Al variare di $k \in \mathbb{R}$, trovare il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ ortogonale ai vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ k \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 7. Dire se esiste l'inversa della seguente matrice A e, in caso positivo, determinarla:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Esercizio 8. Usare le mosse di Gauss per trovare le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ 2y - 2z = 0 \\ 2x + 3y + z = -2 \end{cases}$$

ES. 1

$$f(x) = \sin \sqrt{\frac{x-1}{x^4}}$$

Il dominio naturale di f è dato da

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x^4 \neq 0, \frac{x-1}{x^4} \geq 0 \right\}$$

Perché $x^4 = 0 \Leftrightarrow x = 0$, e $x^4 > 0$ se $x \neq 0$, $\frac{x-1}{x^4} \geq 0 \Leftrightarrow x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$, quindi

$$D = [1, +\infty)$$

Gli estremi di D sono 1 e $+\infty$, e $1 \in D$. Quindi

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sin \sqrt{\frac{x-1}{x^4}} = \sin(0) = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin \sqrt{\frac{x-1}{x^4}} = \sin(0) = 0, \text{ poiché } \frac{x-1}{x^4} = \frac{1 - 1/x}{x^3} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

ES. 2

$$f(x) = \frac{3x^3 + 2}{x^2 + 4x}$$

Il dominio naturale di f è $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 4x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-4, 0\}$.

Verifichiamo l'esistenza di asintoti a $+\infty$. Si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 + 2}{x^2 + 4x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3(3 + \frac{2}{x^3})}{x^2(1 + \frac{4}{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \frac{3 + \frac{2}{x^3}}{1 + \frac{4}{x}} = +\infty \cdot 3 = +\infty$$

quindi f non ha un asintoto orizzontale a $+\infty$. Vediamo se ha un asintoto obliquo. Calcoliamo

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 + 2}{x^2 + 4x} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 + 2}{x^3 + 4x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3(3 + \frac{2}{x^3})}{x^3(1 + \frac{4}{x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{2}{x^3}}{1 + \frac{4}{x}} = 3; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{3x^3 + 2}{x^2 + 4x} - 3x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 + 2 - 3x(x^2 + 4x)}{x^2 + 4x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-12x^2 + 2}{x^2 + 4x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(-12 + \frac{2}{x^2})}{x^2(1 + \frac{4}{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-12 + \frac{2}{x^2}}{1 + \frac{4}{x}} = -12. \end{aligned}$$

Quindi f ha asintoto obliquo a $+\infty$ dato da $y = 3x - 12$

ES. 3

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{x-1}{x^4}} & , \quad \text{se } x \geq 1 \\ 0 & , \quad \text{se } x < 1 \end{cases}$$

Il dominio naturale di f è $D = \mathbb{R}$. Inoltre su $(1, +\infty)$ e $(-\infty, 1)$, la funzione si scrive come composizione di funzioni continue, quindi f è continua certamente in $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Resta da valutare come si comporta in 1. Affinché f sia continua in 1, deve verificarsi $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{\frac{x-1}{x^4}} = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 0 = 0.$$

Quindi $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ esiste ed è uguale a 0. Poiché $f(1) = 0$, concludiamo che f è continua anche in 1. Quindi $C = \mathbb{R}$.

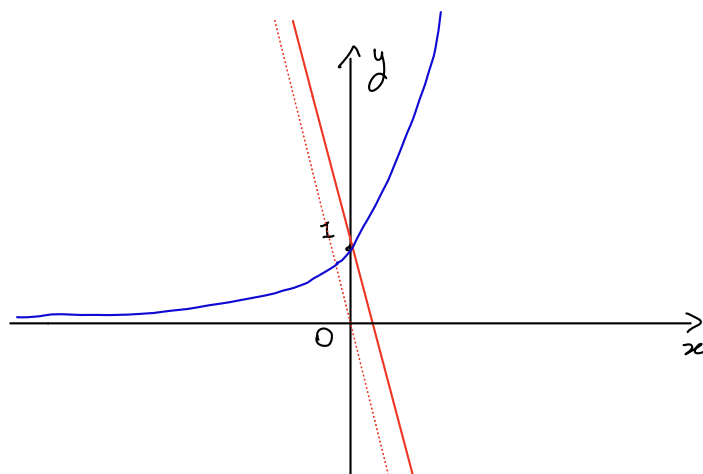
ES. 4

$$e^x + 4x \leq 1$$

Per ricondurre a funzioni il cui grafico è facile da disegnare, riscriviamo la disuguaglianza come

$$e^x \leq -4x + 1$$

e poniamo $f(x) = e^x$, $g(x) = -4x + 1$. Il grafico di f è quello noto della funzione e^x . Il grafico di g è invece la retta $y = -4x$ traslata in alto di 1.



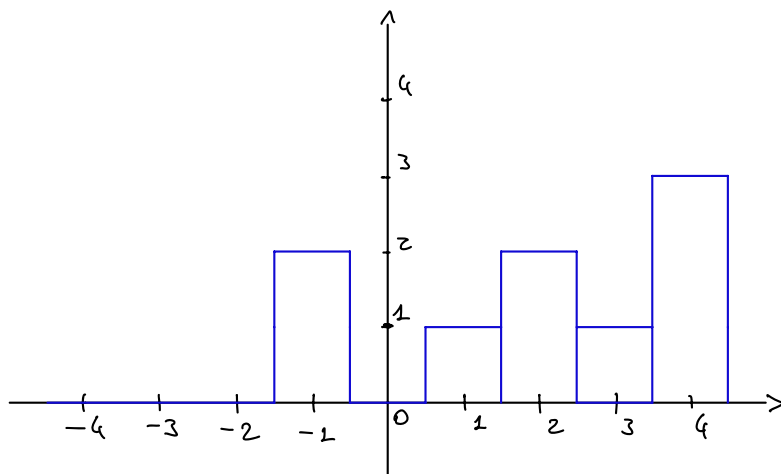
$$\begin{aligned} f(x) & \text{ — (blue curve)} \\ g(x) & \text{ — (red solid line)} \\ y = -4x & \text{ (dotted red line)} \end{aligned}$$

Quindi $f(x) \leq g(x)$ per $x \in [-\infty, 0]$.

ES. 5

$$x = \{-1, -1, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 4\}$$

L'istogramma relativo al campione statistico x è



La media $\bar{x}$ del campione si calcola come

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

dove N è la numerosità del campione, in questo caso $N=9$, e x_i sono i dati.

Quindi

$$\bar{x} = \frac{1}{9} (-1 - 1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 4 + 4 + 4) = \frac{18}{9} = 2$$

La varianza del campione si calcola come

$$\text{var}(x) = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 \right) - \bar{x}^2$$

Quindi

$$\text{var}(x) = \frac{1}{9} ((-1)^2 + (-1)^2 + 1^2 + 2^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 4^2 + 4^2) - 2^2 = \frac{68}{9} - 4 = \frac{32}{9}$$

ES. 6

Sono dati $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$

Il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ ortogonale a v_1 e v_2 è l'insieme W delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} \langle v_1, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rangle = x + y + kz = 0 \\ \langle v_2, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rangle = -2x - 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti del sistema è $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. Voliamo le mosse si fanno per ridurre la matrice completa C a una matrice con pivot uguali a 1, e 0 sopra i pivot.

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

$$C_2 \rightarrow C_2 + 2C_1, \quad C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & -2+2k & 0 \end{array} \right)$$

Poniamo $k=1$, quindi $-2+2k=0$. In questo caso,

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

e il sistema è equivalente a $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y = t \\ z = s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -t - s \\ y = t \\ z = s \end{cases}$

e quindi

$$W = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{se } k=1.$$

Consideriamo ora il caso $k \neq 1$. Quindi $-2+2k \neq 0$. In questo caso,

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & -2+2k & 0 \end{array} \right)$$

$$C_2 \rightarrow \frac{1}{-2+2k} C_2, \quad C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Se $k=0$, la matrice C è nella forma desiderata. Se $k \neq 0$ facciamo ancora la mossa $C_1 \rightarrow C_1 - kC_2$. In entrambi i casi, arriviamo a

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Il sistema iniziale è quindi equivalente a

$$\begin{cases} x+y=0 \\ y=t \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-t \\ y=t \\ z=0 \end{cases}$$

da cui ricaviamo che

$$W = \text{Span} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{se } k \neq 1.$$

ES. 7

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

La matrice inversa di A esiste se e solo se $\det A \neq 0$. Si ha

$$\begin{array}{l} \oplus \\ \ominus \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \det A = (0 \cdot 2 \cdot 3 + 0 \cdot 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot 1) - (0 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \cdot 0) = 1.$$

Quindi A^{-1} esiste. Poniamo

$$C = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$C_1 \leftrightarrow C_2, \quad C = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$C_2 \leftrightarrow C_3, \quad C = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$C_2 \rightarrow C_2 - 3C_3, \quad C = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$C_1 \rightarrow C_1 - 2C_2, \quad C = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Quindi

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ES. 8

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ 2y - 2z = 0 \\ 2x + 3y + z = -2 \end{cases}$$

Si tratta di un sistema lineare in $N=3$ variabili non omogeneo, con matrice dei coefficienti $A \in M(3 \times 3)$ e termine noto $\underline{b}$ dati da

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Applichiamo le mosse di Gauss alla matrice completa $C = (A | \underline{b})$ per capire quanti pivot non nulli esistono.

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

$$C_2 \leftrightarrow C_3, \quad C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

$$C_2 \rightarrow C_2 - 2C_1, \quad C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -4 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

$$C_3 \rightarrow C_3 - 2C_2, \quad C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & -12 & 8 \end{array} \right)$$

La matrice ottenuta ha tre pivot diversi da zero. Rendiamoli tutti uguali a 1, e rendiamo nulli i termini sopra il pivot.

$$C_3 \rightarrow -\frac{1}{12} C_3, \quad C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 \end{array} \right)$$

$$C_2 \rightarrow C_2 - 5C_3, \quad C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 \end{array} \right)$$

$$C_1 \rightarrow C_1 - C_2 + 2C_3, \quad C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 \end{array} \right)$$

Quindi il sistema iniziale è equivalente a

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = -\frac{2}{3} \\ z = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Quindi le soluzioni del sistema sono un unico punto

$$W = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$$