Algebra Lineare
Corso di Ingegneria Biomedica
Compito A del 30-04-2011

- *È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche il testo del compito e i fogli di brutta.*
- *Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.*

Esercizio 1. (6 punti) Studiare al variare di $k \in \mathbb{R}$ l'intersezione tra la retta r e il piano π dati da

$$r = \begin{cases} 2x_1 - kx_2 = 0 \\ x_1 - x_3 = -k \end{cases} \qquad \pi = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

e trovarla esplicitamente nel caso $k = 2$.

Esercizio 2. (8 punti)

i) Dire se esiste un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\text{Im}(L) = \ker(L)$.

ii) scrivere la matrice A associata a un'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $\text{Im}(L_A) = \ker(L_A)$.

Esercizio 3. (8 punti) Dato il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \; : \; \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \right\}$$

i) trovare un supplementare W di U in $\mathbb{R}^4$;

ii) scrivere la matrice A associata a un'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $L_A(U) = W$.

Esercizio 4. (6 punti) Trovare le soluzioni complesse del sistema

$$\begin{cases} e^{z+i} - ie^{2z} = 0 \\ |z| < |z + 2i| < |z - 6i| \end{cases}$$

Esercizio 5. (6 punti) Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

i) dire se è invertibile;

ii) dire se è diagonalizzabile.

Algebra Lineare
Corso di Ingegneria Biomedica
Compito B del 30-04-2011

- *È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche il testo del compito e i fogli di brutta.*
- *Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.*

Esercizio 1. (6 punti) Trovare le soluzioni complesse del sistema

$$\begin{cases} e^{2z+i} + ie^{3z} = 0 \\ |z+2i| < |z+6i| < |z-4i| \end{cases}$$

Esercizio 2. (6 punti) Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

i) dire se è invertibile;

ii) dire se è diagonalizzabile.

Esercizio 3. (8 punti) Dato il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ : \ \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 0 \end{cases} \right\}$$

i) trovare un supplementare W di U in $\mathbb{R}^4$;

ii) scrivere la matrice A associata a un'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $L_A(U) = W$.

Esercizio 4. (6 punti) Studiare al variare di $k \in \mathbb{R}$ l'intersezione tra la retta r e il piano π dati da

$$r = \begin{cases} kx_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = k \end{cases} \qquad \pi = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

e trovarla esplicitamente nel caso $k = 1$.

Esercizio 5. (8 punti)
i) Dire se esiste un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\operatorname{Im}(L) = \ker(L)$.

ii) scrivere la matrice A associata a un'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $\operatorname{Im}(L_A) = \ker(L_A)$.

Algebra Lineare
Corso di Ingegneria Biomedica
Compito C del 30-04-2011

- *È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche il testo del compito e i fogli di brutta.*
- *Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.*

Esercizio 1. (6 punti) Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

i) dire se è invertibile;

ii) dire se è diagonalizzabile.

Esercizio 2. (8 punti) Dato il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ : \ \begin{cases} x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \right\}$$

i) trovare un supplementare W di U in $\mathbb{R}^4$;

ii) scrivere la matrice A associata a un'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $L_A(U) = W$.

Esercizio 3. (6 punti) Trovare le soluzioni complesse del sistema

$$\begin{cases} e^{z+2i} + ie^{2z} = 0 \\ |z - 4i| < |z| < |z - 8i| \end{cases}$$

Esercizio 4. (8 punti)
i) Dire se esiste un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\mathrm{Im}(L) = \ker(L)$.

ii) scrivere la matrice A associata a un'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $\mathrm{Im}(L_A) = \ker(L_A)$.

Esercizio 5. (6 punti) Studiare al variare di $k \in \mathbb{R}$ l'intersezione tra la retta r e il piano π dati da

$$r = \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = -k \\ x_2 - kx_3 = k \end{cases} \qquad \pi = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

e trovarla esplicitamente nel caso $k = 0$.

Algebra Lineare
Corso di Ingegneria Biomedica
Compito D del 30-04-2011

- È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche il testo del compito e i fogli di brutta.
- Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.

Esercizio 1. (6 punti) Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

i) dire se è invertibile;

ii) dire se è diagonalizzabile.

Esercizio 2. (8 punti) Dato il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ : \ \begin{cases} x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \right\}$$

i) trovare un supplementare W di U in $\mathbb{R}^4$;

ii) scrivere la matrice A associata a un'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $L_A(U) = W$.

Esercizio 3. (6 punti) Trovare le soluzioni complesse del sistema

$$\begin{cases} e^{2z+i} + ie^{3z} = 0 \\ |z + 2i| < |z + 6i| < |z - 4i| \end{cases}$$

Esercizio 4. (8 punti)
i) Dire se esiste un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\mathrm{Im}(L) = \ker(L)$.

ii) scrivere la matrice A associata a un'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $\mathrm{Im}(L_A) = \ker(L_A)$.

Esercizio 5. (6 punti) Studiare al variare di $k \in \mathbb{R}$ l'intersezione tra la retta r e il piano π dati da

$$r = \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = -k \\ x_2 - kx_3 = k \end{cases} \qquad \pi = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

e trovarla esplicitamente nel caso $k = 0$.

Algebra Lineare
Corso di Ingegneria Biomedica
Compito E del 30-04-2011

- *È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche il testo del compito e i fogli di brutta.*
- *Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.*

Esercizio 1. (6 punti) Studiare al variare di $k \in \mathbb{R}$ l'intersezione tra la retta r e il piano π dati da

$$r = \begin{cases} 2x_1 - kx_2 = 0 \\ x_1 - x_3 = -k \end{cases} \qquad \pi = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

e trovarla esplicitamente nel caso $k = 2$.

Esercizio 2. (8 punti)

i) Dire se esiste un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\operatorname{Im}(L) = \ker(L)$.

ii) scrivere la matrice A associata a un'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $\operatorname{Im}(L_A) = \ker(L_A)$.

Esercizio 3. (8 punti) Dato il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ : \ \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \right\}$$

i) trovare un supplementare W di U in $\mathbb{R}^4$;

ii) scrivere la matrice A associata a un'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $L_A(U) = W$.

Esercizio 4. (6 punti) Trovare le soluzioni complesse del sistema

$$\begin{cases} e^{z+2i} + ie^{2z} = 0 \\ |z - 4i| < |z| < |z - 8i| \end{cases}$$

Esercizio 5. (6 punti) Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

i) dire se è invertibile;

ii) dire se è diagonalizzabile.

Algebra Lineare
Corso di Ingegneria Biomedica
Compito F del 30-04-2011

- È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche il testo del compito e i fogli di brutta.
- Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.

Esercizio 1. (6 punti) Trovare le soluzioni complesse del sistema

$$\begin{cases} e^{z+i} - ie^{2z} = 0 \\ |z| < |z+2i| < |z-6i| \end{cases}$$

Esercizio 2. (6 punti) Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

i) dire se è invertibile;

ii) dire se è diagonalizzabile.

Esercizio 3. (8 punti) Dato il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ : \ \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 0 \end{cases} \right\}$$

i) trovare un supplementare W di U in $\mathbb{R}^4$;

ii) scrivere la matrice A associata a un'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $L_A(U) = W$.

Esercizio 4. (6 punti) Studiare al variare di $k \in \mathbb{R}$ l'intersezione tra la retta r e il piano π dati da

$$r = \begin{cases} kx_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = k \end{cases} \qquad \pi = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

e trovarla esplicitamente nel caso $k = 1$.

Esercizio 5. (8 punti)
i) Dire se esiste un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\operatorname{Im}(L) = \ker(L)$.

ii) scrivere la matrice A associata a un'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $\operatorname{Im}(L_A) = \ker(L_A)$.

Svolgimento

- **Numeri complessi**

Compiti A e F. *Trovare le soluzioni complesse del sistema*

$$\begin{cases} e^{z+i} - ie^{2z} = 0 \\ |z| < |z+2i| < |z-6i| \end{cases}$$

Scriviamo la prima equazione del sistema nella forma

$$e^{z+i} = ie^{2z} \quad \Longleftrightarrow \quad e^{z+i} = e^{\frac{\pi}{2}i+2z}$$

da cui, per la periodicità dell'esponenziale nel campo complesso, troviamo

$$z + i = \frac{\pi}{2}i + 2z + 2k\pi i \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}$$

e quindi le soluzioni della prima equazione sono

$$z = \left(1 - \frac{\pi}{2}\right) i + 2k\pi i \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}$$

La seconda condizione del sistema si traduce nella condizione

$$-1 < \mathrm{Im}(z) < 2$$

quindi le soluzioni ammissibili sono quelle per cui

$$-1 < 1 - \frac{\pi}{2} + 2k\pi < 2,$$

da cui si ricava che l'unica soluzione del sistema è

$$z = \left(1 - \frac{\pi}{2}\right) i$$

Compiti B e D. *Trovare le soluzioni complesse del sistema*

$$\begin{cases} e^{2z+i} + ie^{3z} = 0 \\ |z+2i| < |z+6i| < |z-4i| \end{cases}$$

Scriviamo la prima equazione del sistema nella forma

$$e^{2z+i} = -ie^{3z} \quad \Longleftrightarrow \quad e^{2z+i} = e^{\frac{3}{2}\pi i+3z}$$

da cui, per la periodicità dell'esponenziale nel campo complesso, troviamo

$$2z + i = \frac{3}{2}\pi i + 3z + 2k\pi i \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}$$

e quindi le soluzioni della prima equazione sono

$$z = \left(1 - \frac{3}{2}\pi\right) i + 2k\pi i \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}$$

La seconda condizione del sistema si traduce nella condizione

$$-4 < \mathrm{Im}(z) < -1$$

quindi le soluzioni ammissibili sono quelle per cui

$$-4 < 1 - \frac{3}{2}\pi + 2k\pi < -1,$$

da cui si ricava che l'unica soluzione del sistema è

$$z = \left(1 - \frac{3}{2}\pi\right) i$$

Compiti C e E. *Trovare le soluzioni complesse del sistema*

$$\begin{cases} e^{z+2i} + ie^{2z} = 0 \\ |z-4i| < |z| < |z-8i| \end{cases}$$

Scriviamo la prima equazione del sistema nella forma

$$e^{z+2i} = -ie^{2z} \qquad \Longleftrightarrow \qquad e^{z+2i} = e^{\frac{3}{2}\pi i + 2z}$$

da cui, per la periodicità dell'esponenziale nel campo complesso, troviamo

$$z + 2i = \frac{3}{2}\pi i + 2z + 2k\pi i \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}$$

e quindi le soluzioni della prima equazione sono

$$z = \left(2 - \frac{3}{2}\pi\right) i + 2k\pi i \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}$$

La seconda condizione del sistema si traduce nella condizione

$$2 < \mathrm{Im}(z) < 4$$

quindi le soluzioni ammissibili sono quelle per cui

$$2 < 2 - \frac{3}{2}\pi + 2k\pi < 4,$$

da cui si ricava che l'unica soluzione del sistema è

$$z = \left(2 + \frac{\pi}{2}\right) i$$

- **Applicazioni lineari**

Tutti i compiti. *i) Dire se esiste un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che Im$(L) = \ker(L)$.*

La risposta è no. Infatti dal Teorema della Dimensione troviamo

$$3 = \dim(\mathrm{Im}(L)) + \dim(\ker(L)) = 2\dim(\ker(L))$$

il che implica che la dimensione del nucleo dell'applicazione è $\frac{3}{2}$, che è assurdo.

ii) Scrivere la matrice A associata a un'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $Im(L_A) = \ker(L_A)$.

Su $\mathbb{R}^4$ questo è possibile con $\dim(\ker(L_A)) = \dim(\mathrm{Im}(L_A)) = 2$. Data la base canonica $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ di $\mathbb{R}^4$ possiamo definire L_A ponendo

$$L_A(e_1) = e_3,\ L_A(e_2) = e_4,\ L_A(e_3) = 0,\ L_A(e_4) = 0.$$

La matrice associata è allora la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Compito A e E. *Dato il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$*

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ : \ \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \right\}$$

i) trovare un supplementare W di U in $\mathbb{R}^4$;

Troviamo una base di U risolvendo il sistema. Per farlo partiamo dalla matrice dei coefficienti C e la riduciamo a scala, ottenendo

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sim \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui ricaviamo che

$$U = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Adesso completiamo la base di U a un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$ con i vettori della base canonica e ne estraiamo una base. Scriviamo la matrice

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \sim \quad \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

da cui otteniamo che

$$\mathbb{R}^4 = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

e quindi $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$ se scegliamo

$$W = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

ii) scrivere la matrice A associata a un'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $L_A(U) = W$.

Dal punto precedente, ricaviamo una base di $\mathbb{R}^4$ su cui definire L_A e le basi di U e W. Per soddisfare le richieste possiamo definire

$$L_A \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L_A \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L_A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L_A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dove la scelta delle immagini dei vettori che generano W è arbitraria. Con questa scelta la matrice A, rispetto alla base canonica, è data da

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dove abbiamo usato

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Compito B e F. *Dato il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$*

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ : \ \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 0 \end{cases} \right\}$$

i) trovare un supplementare W di U in $\mathbb{R}^4$;

Troviamo una base di U risolvendo il sistema. Per farlo partiamo dalla matrice dei coefficienti C e la riduciamo a scala, ottenendo

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \sim \quad S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui ricaviamo che

$$U = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \right)$$

Adesso completiamo la base di U a un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$ con i vettori della base canonica e ne estraiamo una base. Scriviamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \sim \quad \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui otteniamo che

$$\mathbb{R}^4 = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

e quindi $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$ se scegliamo

$$W = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

ii) scrivere la matrice A associata a un'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $L_A(U) = W$.

Dal punto precedente, ricaviamo una base di $\mathbb{R}^4$ su cui definire L_A e le basi di U e W. Per soddisfare le richieste possiamo definire

$$L_A\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L_A\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L_A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L_A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dove la scelta delle immagini dei vettori che generano W è arbitraria. Con questa scelta la matrice A, rispetto alla base canonica, è data da

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dove abbiamo usato

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Compito C e D. *Dato il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$*

$$U = \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ : \ \begin{cases} x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}\right\}$$

i) trovare un supplementare W di U in $\mathbb{R}^4$;

Troviamo una base di U risolvendo il sistema. Per farlo partiamo dalla matrice dei coefficienti C e la riduciamo a scala, ottenendo

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \sim S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

da cui ricaviamo che

$$U = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

Adesso completiamo la base di U a un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$ con i vettori della base canonica e ne estraiamo una base. Scriviamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui otteniamo che

$$\mathbb{R}^4 = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

e quindi $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$ se scegliamo

$$W = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

ii) scrivere la matrice A associata a un'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $L_A(U) = W$.

Dal punto precedente, ricaviamo una base di $\mathbb{R}^4$ su cui definire L_A e le basi di U e W. Per soddisfare le richieste possiamo definire

$$L_A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L_A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L_A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L_A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dove la scelta delle immagini dei vettori che generano W è arbitraria. Con questa scelta la matrice A, rispetto alla base canonica, è data da

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dove abbiamo usato

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- **Retta e piano.**

Compiti A e E. *Studiare al variare di $k \in \mathbb{R}$ l'intersezione tra la retta r e il piano π dati da*

$$r = \begin{cases} 2x_1 - kx_2 = 0 \\ x_1 - x_3 = -k \end{cases} \qquad \pi = Span\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

e trovarla esplicitamente nel caso $k = 2$.

Scriviamo innanzitutto l'equazione cartesiana del piano π. Introduciamo la matrice

$$B = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 1 & 2 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \end{array}\right) \quad \sim \quad S = \left(\begin{array}{cc|l} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & x_1 - x_2 + x_3 \end{array}\right)$$

dove S è una sua riduzione a scala. La condizione di compatibilità per S ci fornisce l'equazione cartesiana di π, quindi

$$\pi = \{x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$$

Per studiare l'intersezione tra r e π dobbiamo studiare le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - kx_2 = 0 \\ x_1 - x_3 = -k \end{cases}$$

al variare di $k \in \mathbb{R}$. Scriviamo la matrice A dei coefficienti e ne calcoliamo il determinante. Si trova

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -k & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \det(A) = 2k - 2$$

Quindi se $k \neq 1$ il sistema ha un'unica soluzione, e quindi $r \cap \pi$ è un punto. Se invece $k = 1$, scrivendo la matrice completa

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

otteniamo $\text{rg}(A) = 2$ e $\text{rg}(A') = 3$, quindi il sistema non è compatibile, e $r \cap \pi = \emptyset$.
Risolviamo infine il sistema nel caso $k = 2$. Facciamo la riduzione a scala della matrice completa A'

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \quad \sim \quad S = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

da cui ricaviamo che il punto di intersezione è

$$r \cap \pi = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Compiti B e F. *Studiare al variare di $k \in \mathbb{R}$ l'intersezione tra la retta r e il piano π dati da*

$$r = \begin{cases} kx_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = k \end{cases} \qquad \pi = Span\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

e trovarla esplicitamente nel caso $k = 1$.

Scriviamo innanzitutto l'equazione cartesiana del piano π. Introduciamo la matrice

$$B = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ -1 & 1 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \end{array}\right) \quad \sim \quad S = \left(\begin{array}{cc|l} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 2 & x_1 + x_2 \\ 0 & 0 & -x_1 - x_2 + 2x_3 \end{array}\right)$$

dove S è una sua riduzione a scala. La condizione di compatibilità per S ci fornisce l'equazione cartesiana di π, quindi

$$\pi = \{x_1 + x_2 - 2x_3 = 0\}$$

Per studiare l'intersezione tra r e π dobbiamo studiare le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ kx_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = k \end{cases}$$

al variare di $k \in \mathbb{R}$. Scriviamo la matrice A dei coefficienti e ne calcoliamo il determinante. Si trova

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & k & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \det(A) = k$$

Quindi se $k \neq 0$ il sistema ha un'unica soluzione, e quindi $r \cap \pi$ è un punto. Se invece $k = 0$, scrivendo la matrice completa

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

otteniamo $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A') = 2$, quindi il sistema è compatibile, e l'insieme delle soluzioni è un sottospazio vettoriale di dimensione 1. Quindi $r \cap \pi = r$.
Risolviamo infine il sistema nel caso $k = 1$. Facciamo la riduzione a scala della matrice completa A'

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \quad \sim \quad S = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

da cui ricaviamo che il punto di intersezione è

$$r \cap \pi = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Compiti C e D. *Studiare al variare di $k \in \mathbb{R}$ l'intersezione tra la retta r e il piano π dati da*

$$r = \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = -k \\ x_2 - kx_3 = k \end{cases} \qquad \pi = Span\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

e trovarla esplicitamente nel caso $k = 0$.

Scriviamo innanzitutto l'equazione cartesiana del piano π. Introduciamo la matrice

$$B = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 1 & 1 & x_3 \end{array}\right) \quad \sim \quad S = \left(\begin{array}{cc|l} 2 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & -x_1 - 2x_2 + 2x_3 \end{array}\right)$$

dove S è una sua riduzione a scala. La condizione di compatibilità per S ci fornisce l'equazione cartesiana di π, quindi

$$\pi = \{x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0\}$$

Per studiare l'intersezione tra r e π dobbiamo studiare le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -k \\ x_2 - kx_3 = k \end{cases}$$

al variare di $k \in \mathbb{R}$. Scriviamo la matrice A dei coefficienti e ne calcoliamo il determinante. Si trova

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -k \end{pmatrix}, \qquad \det(A) = 3k - 1$$

Quindi se $k \neq \frac{1}{3}$ il sistema ha un'unica soluzione, e quindi $r \cap \pi$ è un punto. Se invece $k = \frac{1}{3}$, scrivendo la matrice completa

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

otteniamo $\mathrm{rg}(A) = 2$ e $\mathrm{rg}(A') = 3$, quindi il sistema non è compatibile, e $r \cap \pi = \emptyset$.
Risolviamo infine il sistema nel caso $k = 0$. Facciamo la riduzione a scala della matrice completa A'

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \sim \quad S = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

da cui ricaviamo che il punto di intersezione è

$$r \cap \pi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Avremmo potuto subito concludere, osservando che il sistema diventa omogeneo e ha un'unica soluzione. Quindi la soluzione è l'origine di $\mathbb{R}^3$.

- **Matrice.**

Compiti A e F. *Data la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

i) dire se è invertibile;

Usiamo il fatto che una matrice è invertibile se e solo se il suo determinante è diverso da 0. Si trova $\det(A) = 2$ e quindi A è invertibile.

ii) dire se è diagonalizzabile.

Dobbiamo cercare gli autovalori di A e le loro molteplicità algebriche e geometriche. Scriviamo il polinomio caratteristico di A

$$p_A(t) = \det(A - tI) = -(t^3 - 4t^2 + 5t - 2) = -(t-1)^2(t-2)$$

Quindi troviamo che gli autovalori sono $\{1, 2\}$ con molteplicità algebriche $m_1 = 2$ e $m_2 = 1$. Cerchiamo le molteplicità geometriche:

$$g_1 = \dim \ker(A - I) = \dim \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

$$g_2 = \dim \ker(A - 2I) = \dim \ker \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

Quindi poiché $g_1 = m_1$ e $g_2 = m_2$, la matrice A è diagonalizzabile. (Per l'autovalore 2, poiché $m_2 = 1$, si può subito concludere che $g_2 = m_2 = 1$.)

Compiti B e D. *Data la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

i) dire se è invertibile;

Usiamo il fatto che una matrice è invertibile se e solo se il suo determinante è diverso da 0. Si trova $\det(A) = 2$ e quindi A è invertibile.

ii) dire se è diagonalizzabile.

Dobbiamo cercare gli autovalori di A e le loro molteplicità algebriche e geometriche. Scriviamo il polinomio caratteristico di A

$$p_A(t) = \det(A - tI) = -(t^3 - 4t^2 + 5t - 2) = -(t - 1)^2(t - 2)$$

Quindi troviamo che gli autovalori sono $\{1, 2\}$ con molteplicità algebriche $m_1 = 2$ e $m_2 = 1$. Cerchiamo le molteplicità geometriche:

$$g_1 = \dim \ker(A - I) = \dim \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 2$$

$$g_2 = \dim \ker(A - 2I) = \dim \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} = 1$$

Quindi poiché $g_1 = m_1$ e $g_2 = m_2$, la matrice A è diagonalizzabile. (Per l'autovalore 2, poiché $m_2 = 1$, si può subito concludere che $g_2 = m_2 = 1$.)

Compiti C e E. *Data la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

i) dire se è invertibile;

Usiamo il fatto che una matrice è invertibile se e solo se il suo determinante è diverso da 0. Si trova $\det(A) = 0$ e quindi A non è invertibile.

ii) dire se è diagonalizzabile.

Dobbiamo cercare gli autovalori di A e le loro molteplicità algebriche e geometriche. Scriviamo il polinomio caratteristico di A

$$p_A(t) = \det(A - tI) = -(t^3 - 6t^2 + 9t) = -t\,(t-3)^2$$

Quindi troviamo che gli autovalori sono $\{0, 3\}$ con molteplicità algebriche $m_0 = 1$ e $m_3 = 2$. Cerchiamo le molteplicità geometriche:

$$g_0 = \dim\ker(A) = \dim\ker\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 1$$

$$g_3 = \dim\ker(A - 3I) = \dim\ker\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ -2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Quindi poiché $g_0 = m_0$ e $g_3 = m_3$, la matrice A è diagonalizzabile. (Per l'autovalore 0, poiché $m_0 = 1$, si può subito concludere che $g_0 = m_0 = 1$.)