Sistemi Dinamici
Corso di Laurea in Matematica
Compito del 29-01-2025

Esercizio 1. (10 punti) Disegnare il ritratto di fase del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = 4y \\ \dot{y} = (2 - x - y)(2x - y) \end{cases}$$

considerando in particolare l'eventuale esistenza di orbite periodiche.

Esercizio 2. (10 punti) Si consideri il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y^2 \\ \dot{y} = 2 - 2x - \mu\, y^2 \end{cases}$$

(a) Per $\mu = 0$, si disegni il ritratto di fase e si trovi, se esiste, un $y_0 \in \mathbb{R}$ per cui $\omega(0, y_0) = \{(1, 0)\}$.

(b) Per $\mu = 1$, per il punto $(0, y_0)$ trovato al punto (a), determinare se esiste $\omega(0, y_0)$. Discutere l'esistenza di un $y_1 \in \mathbb{R}$ per cui $\omega(0, y_1) = \{(1, 0)\}$.

Esercizio 3. (10 punti) Si consideri la famiglia di funzioni continue $f_\lambda : [0, 1] \to [0, 1]$ definita da

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda\, x\,, & x \in J_1 = [0, \frac{1}{4}] \\ \lambda \left(\frac{1}{2} - x\right)\,, & x \in J_2 = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ 3 \left(x - \frac{1}{2}\right)\,, & x \in J_3 = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ 3\,(1 - x)\,, & x \in J_4 = [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}$$

al variare di $\lambda \in (0, 4]$.

(a) Costruire l'f_λ-grafo di $\mathcal{J} = \{J_1, J_2, J_3, J_4\}$ al variare di λ.

(b) Determinare esistenza e stabilità dei punti fissi al variare di λ. Per quali valori di λ ci sono punti periodici di periodo minimo 2 in J_3 o in J_4?

(c) Per $\lambda = 3$, determinare l'entropia topologica di f_λ.

ESERCIZIO 1

$$\begin{cases} \dot{x} = 4y \\ \dot{y} = (2-x-y)(2x-y) \end{cases}$$

Iniziamo individuando i punti fissi del sistema. Si ha

$$\begin{cases} 4y=0 \\ (2-x-y)(2x-y)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y=0 \\ x \in \{0,2\} \end{cases}$$

quindi i punti fissi sono

$$P_1 = (0,0) \quad , \quad P_2 = (2,0)$$

Per caratterizzarne la stabilità, usiamo la matrice jacobiana del campo F

$$JF(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4-4x-y & -2-x+2y \end{pmatrix}$$

- $JF(P_1) = JF(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$. Poiché $\det JF(P_1) = -16 < 0$, si ha che P_1 è un punto iperbolico instabile di tipo sella. Inoltre gli autovalori di $JF(P_1)$ sono $\lambda_1 = -1-\sqrt{17}$, $\lambda_2 = -1+\sqrt{17}$, con autovettori rispettivi

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\lambda_1}{4} \end{pmatrix} \quad , \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\lambda_2}{4} \end{pmatrix}$$

- $JF(P_2) = JF(2,0) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$. Poiché $\det JF(P_2) = 16 > 0$ e $\operatorname{tr} JF(P_2) = -4 < 0$, si ha $(\operatorname{tr} JF(P_2))^2 - 4 \det JF(P_2) < 0$, quindi P_2 è un punto iperbolico asintoticamente stabile di tipo fuoco.

Insiemi invarianti. Non ci sono insiemi invarianti ovvi, si può procedere per verificare se ci fossero rette invarianti della forma $ax+by=c$ con $a,b\neq 0$.

Ponendo $I(x,y)=ax+by$ si ha

$$\dot{I}\Big|_{\{I=c\}}(x,y)= a\dot{x}+b\dot{y}\Big|_{ax+by=c} = 4ay + b(2-x-y)(2x-y)\Big|_{y=\frac{c-ax}{b}} =$$

$$= \frac{1}{b}\left(4ac-4a^2x+((2-x)b-c+ax)(2bx-c+ax)\right)$$

$$= \frac{1}{b}\left(x^2(a^2+ab-2b^2)+x(-4a^2+4b^2-bc+2cb+2ac)+4ac-2bc\right)$$

Dunque
$$\dot{I}\Big|_{\{I=c\}}\equiv 0 \iff \begin{cases} a^2+ab-2b^2=0 \\ -4a^2+4b^2-bc+2cb+2ac=0 \\ 4ac-2bc=0 \end{cases}$$

e il sistema non ammette soluzioni con $a,b\neq 0$.

Quindi non esistono rette invarianti

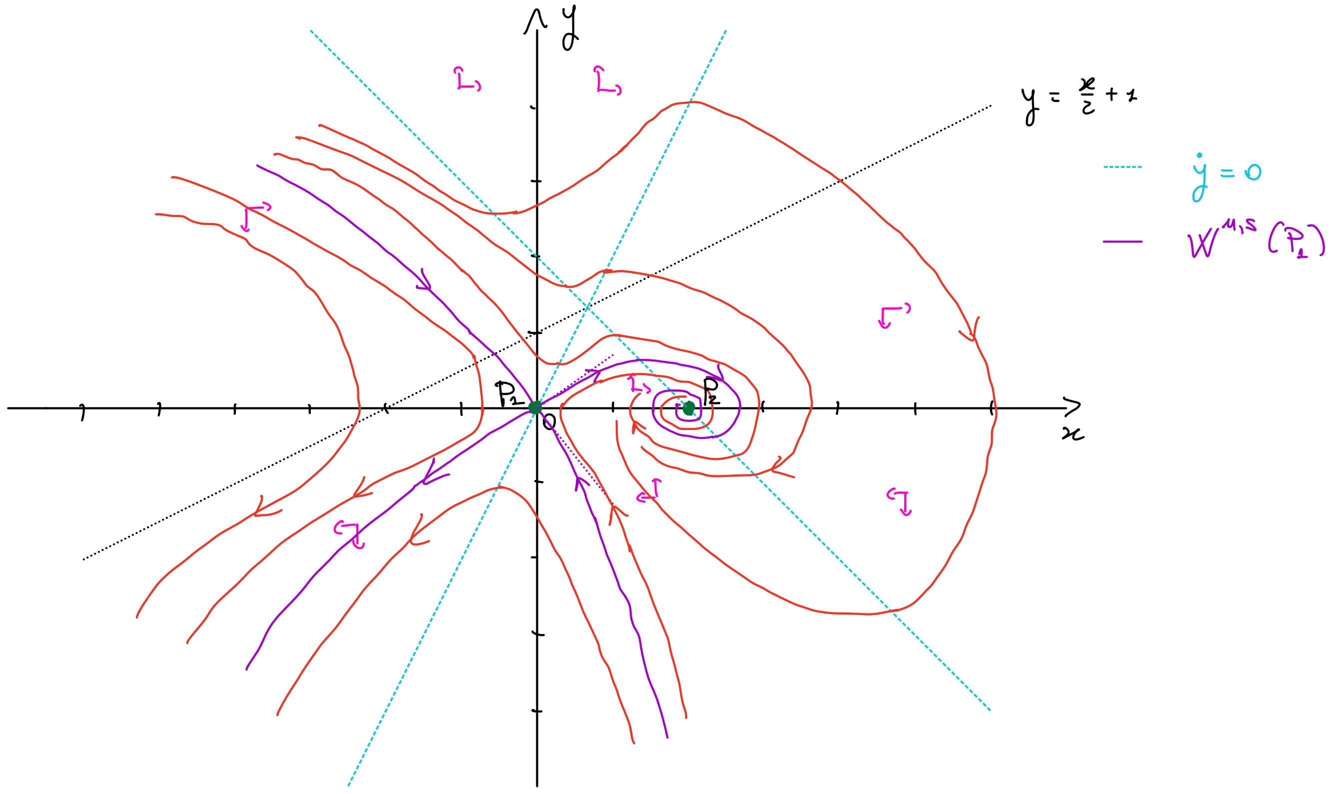
Simmetrie. Non ci sono evidenti simmetrie

Orbite periodiche. Per la teoria dell'indice di Poincaré, se esiste un'orbita periodica deve racchiudere il punto P_2 e non P_1.

Inoltre $\mathrm{div}(F)(x,y)= \mathrm{tr}\, JF(x,y) = -2-x-2y$. Quindi per il criterio di Bendixson-Dulac non possono esistere orbite periodiche interamente contenute in $\{y>\frac{x}{2}+1\}$ o in $\{y<\frac{x}{2}+1\}$.

Ritratto di fase. Utilizzando il segno del campo possiamo disegnare il ritratto di fase.

In particolare, dimostreremo che non possono esistere orbite periodiche, perché dovendo racchiudere P_2, un'eventuale orbita periodica passerebbe sotto la varietà instabile di P_1, e dunque sarebbe interamente contenuta in $\{y<\frac{x}{2}+1\}$.



Osserviamo che il ramo di $W^u(P_1)$ nel semi-piano $\{x>0\}$ deve necessariamente convergere verso P_2. Per determinare questa proprietà è fondamentale usare l'esistenza del ramo di $W^s(P_1)$ in $\{x>0\}$. La posizione relativa tra questi due rami non si può invertire, cioè $W^s(P_1)$ non può essere più interna di $W^u(P_1)$.

ESERCIZIO 2

$$\begin{cases} \dot{x} = y^2 \\ \dot{y} = 2 - 2x - \mu y^2 \end{cases}$$

(a) Per $\mu = 0$ il sistema è hamiltoniano con

$$H(x,y) = \frac{1}{3}y^3 + x^2 - 2x$$

e ha un solo punto fisso in $P = (1,0)$. Il punto P è non iperbolico, e per disegnare il ritratto di fase usiamo gli insiemi di livello $\{H(x,y) = c\}$, che sono insiemi invarianti.

Innanzitutto $H(P) = H(1,0) = -1$, e

$$H(x,y) = -1 \iff x^2 - 2x + 1 + \frac{1}{3}y^3 = 0$$

le cui soluzioni sono rappresentate dalle curve $x^+(y) = 1 + \sqrt{-\frac{1}{3}y^3}$ e $x^-(y) = 1 - \sqrt{-\frac{1}{3}y^3}$, che esistono per $y \le 0$. Osserviamo che $x^+(0) = x^-(0) = 1$ e $\lim_{y\to 0^-} \frac{d}{dy} x^\pm(y) = \lim_{y \to 0^-} \left[\mp \frac{\sqrt{3}}{2} |y|^{1/2}\right] = 0$.

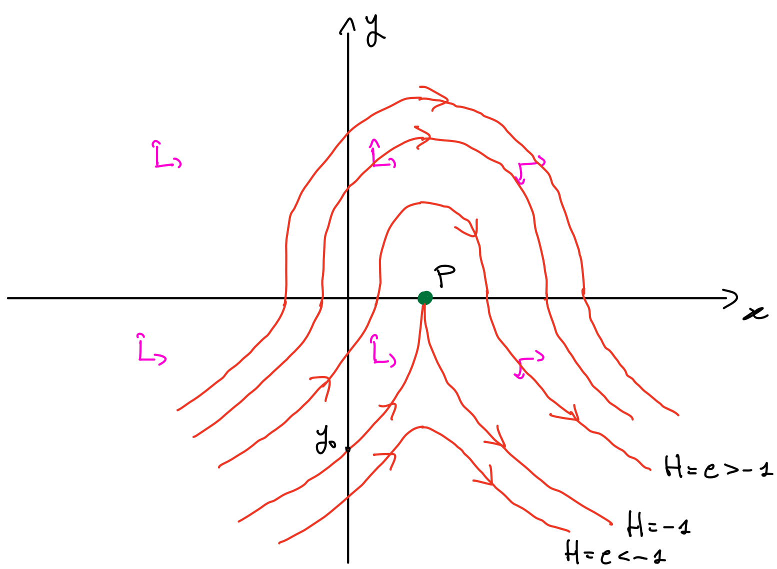
Per $c \neq -1$, si ha

$$H(x,y) = c \iff x_c^\pm(y) = 1 \pm \sqrt{1+c-\frac{1}{3}y^3}$$

che esistono per $y \le [3(1+c)]^{1/3}$, e

$$\lim_{y \to ([3(1+c)]^{1/3})^-} \frac{d}{dy} x_c^\pm(y) = \lim_{y \to ([3(1+c)]^{1/3})^-} \left[\pm \frac{|1+c-\frac{1}{3}y^3|^{-1/2}}{2} (-y^2)\right] = \mp\infty$$

Si arriva dunque al seguente ritratto di fase, che è simmetrico rispetto alla retta $x = 1$.



Essendo il sistema hamiltoniano, per determinare $y_0 \in \mathbb{R}$ t.c. $\omega(0,y_0) = \{P\}$ bisogna trovare la soluzione di $H(0,y_0) = H(1,0)$, ossia di

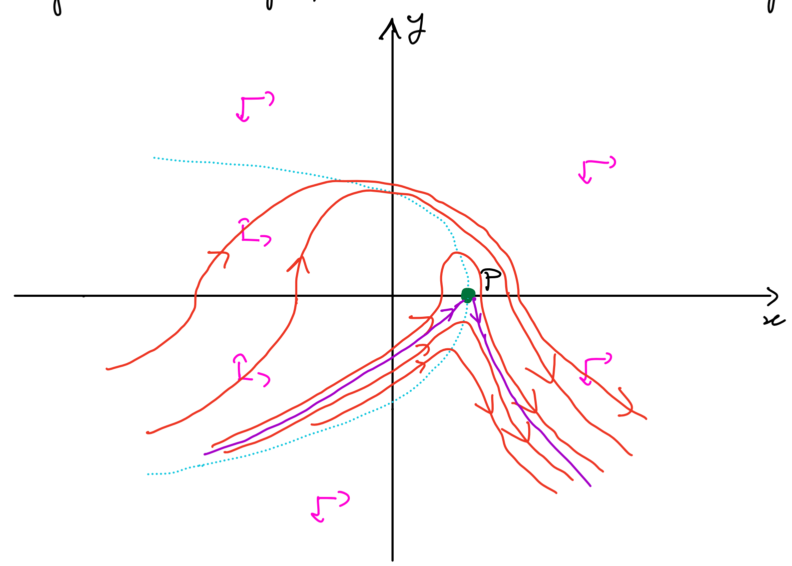
$$\left.\frac{1}{3}y^3 + x^2 - 2x\right|_{x=0} = -1$$

da cui $\boxed{y_0 = (-3)^{1/3}.}$

(b) Per $\mu = 1$, il sistema continua ad avere un unico punto fisso in $P = (1,0)$.
Il sistema non è più hamiltoniano e per $H(x,y) = \frac{1}{3}y^3 + x^2 - 2x$ si trova $\dot{H}(x,y) = -y^4$, quindi H è decrescente lungo le orbite.

Di conseguenza $t \mapsto H(x(t;(0,y_0)), y(t;(0,y_0)))$ è decrescente (indichiamo con $(x(t;(0,y_0)), y(t;(0,y_0)))$ la soluzione del sistema con condizione iniziale $(0,y_0)$) e $H(x(0;(0,y_0)), y(0;(0,y_0))) = H(0,y_0) = -1 = H(P)$. Usando il ritratto di fase del punto (a), in cui sono indicati gli insiemi di livello di H, e che $\dot{x} > 0 \ \forall y > 0$, troviamo che $x(t;(0,y_0)) \to +\infty$ e $y(t;(0,y_0)) \to +\infty$. Quindi, in questo caso, $\omega(0,y_0)$ non esiste.

Usando il segno del campo, studiamo il ritratto di fase.

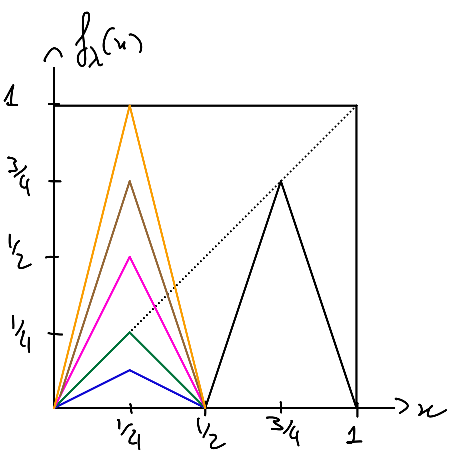


Poiché $\dot{x} \geq 0 \ \forall (x,y)$, e $\dot{x} = 0 \iff y = 0$, si ottiene che $\forall u \in \mathbb{R} \ \exists! \ y(u) \in \mathbb{R}$ t.c. $\varphi_t(0, y(u)) = (1, u)$ per qualche $t > 0$. Quindi $\exists! \ y_1 = y(0)$ t.c. $\omega(0, y_1) = \{P\}$.

$$\boxed{\text{ESERCIZIO 3}}$$

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda x, & \text{se } x \in J_1 = [0, 1/4] \\ \lambda\left(\frac{1}{2} - x\right), & \text{se } x \in J_2 = [1/4, 1/2] \\ 3\left(x - \frac{1}{2}\right), & \text{se } x \in J_3 = [1/2, 3/4] \\ 3(1 - x), & \text{se } x \in J_4 = [3/4, 1] \end{cases} \quad \text{con } \lambda \in (0, 4]$$

— $f_\lambda|_{J_3 \cup J_4}$



$\lambda \in (0,1)$

$\lambda = 1$

$\lambda = 2$

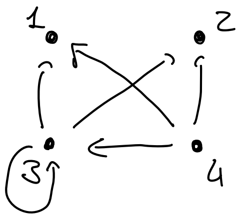
$\lambda = 3$

$\lambda = 4$

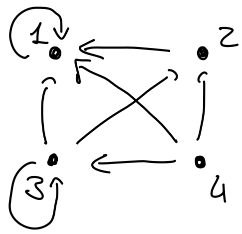
$f_\lambda|_{J_1 \cup J_2}$

(a) L'f_λ-grafo di $\mathcal{J}$ dipende da λ solo per le immagini di J_1 e J_2

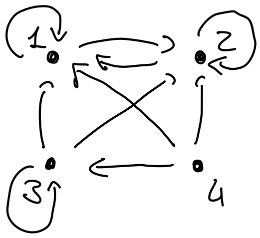
$\lambda \in (0,1)$



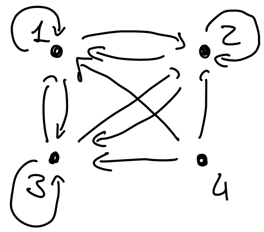
$\lambda \in [1,2)$



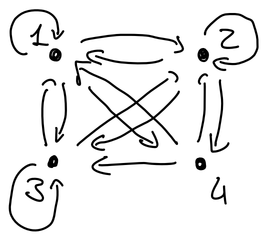
$\lambda \in [2,3)$



$\lambda \in [3,4)$



$\lambda = 4$



(b) In $J_3 \cup J_4$, abbiamo un punto fisso in $x_2 = 3/4 \quad \forall \lambda \in (0,4]$

In $J_1 \cup J_2$ si ha questa situazione:

- se $\lambda \in (0,1)$, c'è un solo punto fisso in $x_0 = 0$;
- se $\lambda = 1$, tutti i punti di $J_1 = [0, 1/4]$ sono fissi e sono stabili ma non attrattivi;
- se $\lambda \in (1,4]$, ci sono due punti fissi $x_0 = 0$ e $x_1 = \frac{\lambda}{2(\lambda+1)} \in \left(\frac{1}{4}, \frac{2}{5}\right]$

Per quanto riguarda la stabilità:

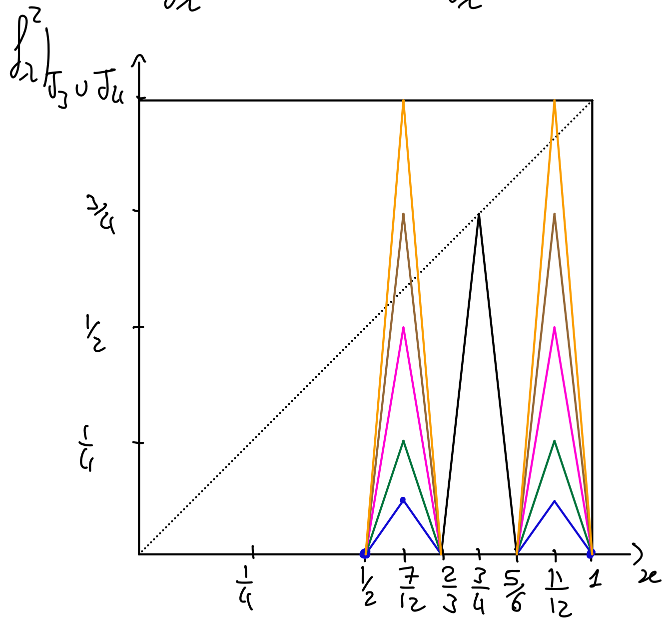
- $x_0 = 0$. Si ha $f'_\lambda(0) = \lambda$, quindi x_0 è attrattivo per $\lambda \in (0,1)$, e repulsivo per $\lambda \in (1,4]$.
- $x_1 = \frac{\lambda}{2(\lambda+1)}$ per $\lambda \in (1,4]$. Si ha $f'_\lambda(x_1) = -\lambda$, quindi x_1 è repulsivo.
- $x_2 = \frac{3}{4}$. Si ha $(f'_\lambda)^+(x_2) = -3$, $(f'_\lambda)^-(x_2) = 3$, quindi x_2 è repulsivo.

Per valutare l'esistenza di punti periodici di periodo minimo 2 in $J_3 \cup J_4$, disegniamo il grafico di f_λ^2 su $J_3 \cup J_4$.

Si ha

$$f_\lambda([\tfrac{1}{2}, \tfrac{7}{12}]) = f_\lambda([\tfrac{11}{12}, 1]) = [0, \tfrac{1}{4}]$$

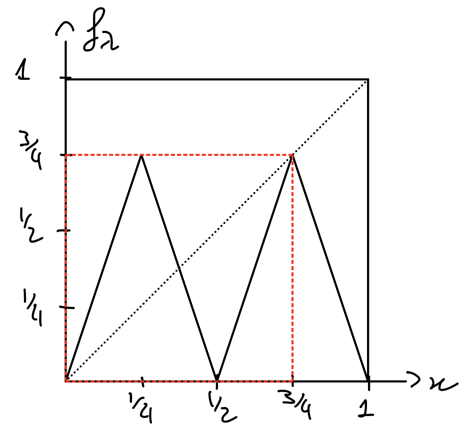
$$f_\lambda([\tfrac{7}{12}, \tfrac{2}{3}]) = f_\lambda([\tfrac{5}{6}, \tfrac{11}{12}]) = [\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}]$$



Quindi c'è un punto periodico di periodo minimo 2 in J_3 se e solo se $f_\lambda^2(\tfrac{7}{12}) \geq \tfrac{7}{12}$ $\iff f_\lambda(\tfrac{1}{4}) \geq \tfrac{7}{12} \iff \tfrac{\lambda}{4} \geq \tfrac{7}{12} \iff \lambda \geq \tfrac{7}{3}$.

Analogamente c'è un punto periodico di periodo minimo 2 in J_4 se e solo se $f_\lambda^2(\tfrac{11}{12}) \geq \tfrac{11}{12} \iff f_\lambda(\tfrac{1}{4}) \geq \tfrac{11}{12} \iff \tfrac{\lambda}{4} \geq \tfrac{11}{12} \iff \lambda \geq \tfrac{11}{3}$.

$\boxed{\text{(c)}}$ Per $\lambda = 3$ il grafico di f_λ è



Si osserva che $f_3(J_4) = J_1 \cup J_2 \cup J_3$, quindi se consideriamo il comportamento

esintotiko di f_3, è equivalente restringere la mappa a $I := J_1 \cup J_2 \cup J_3$.
Su I, f_3 è una mappa monotona a tratti con rami completi (ossia $f(J_i) = I \ \forall i$), quindi $h_{top}(f_3) = \log 3$.