Sistemi Dinamici
Corso di Laurea in Matematica
Compito del 29-01-2024

Esercizio 1. (10 punti) Disegnare il ritratto di fase del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x(\mu + y) + y - 1 \\ \dot{y} = -x(1 + y) \end{cases}$$

al variare di $\mu \in [1, 2]$.

Esercizio 2. (10 punti) Si consideri il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y + y^3 \\ \dot{y} = \varepsilon - \cos x \end{cases}$$

al variare di $\varepsilon \in [0, +\infty)$.

(a) Nel caso $\varepsilon = 0$, disegnare il ritratto di fase e determinare α-limite e ω-limite del punto $(x_0, y_0) = (0, (\sqrt{5} - 1)^{1/2})$.

(b) Come varia il ritratto di fase per $\varepsilon > 0$?

Esercizio 3. (10 punti) Si consideri la famiglia di trasformazioni continue

$$f_\lambda : [0, 1] \to [0, 1], \quad f_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda\, x, & \text{se } x \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right], \\ \lambda \sqrt{1 - x^2}, & \text{se } x \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]. \end{cases}$$

per valori del parametro $\lambda \in [0, \sqrt{2}]$.

(a) Discutere esistenza e stabilità dei punti fissi di f_λ.

(b) Determinare l'espressione analitica di f_λ^2 per $\lambda \in (1, \sqrt{2}]$.

(c) Dimostrare che esiste $\lambda_0 \in (0, \sqrt{2})$ tale che $h_{top}(f_\lambda) > 0$ per ogni $\lambda \in [\lambda_0, \sqrt{2}]$.

ESERCIZIO 1

$$\begin{cases} \dot{x} = x(\mu+y) + y - 1 \\ \dot{y} = -x(1+y) \end{cases}, \quad \mu \in [1,2]$$

- Iniziamo identificando i punti fissi del sistema. Dalla seconda componente del campo troviamo $x=0$ oppure $y=-1$, che sostituiti nella prima componente ci permettono di determinare che

$$\text{Punti fissi} = \begin{cases} \{(0,1)\}, & \text{se } \mu = 1 \\ \{(0,1), (\frac{2}{\mu-1}, -1)\}, & \text{se } \mu \in (1,2] \end{cases}$$

Caratterizziamo la stabilità dei punti fissi.

$$JF(x,y) = \begin{pmatrix} \mu+y & x+1 \\ -(1+y) & -x \end{pmatrix}$$

- $P_1 = (0,1)$ Abbiamo

$$JF(P_1) = \begin{pmatrix} \mu+1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det JF(P_1) = 2 > 0, \quad \operatorname{tr} JF(P_1) = \mu+1 > 0, \quad \forall \mu \in [1,2]$$

quindi il punto fisso P_1 è iperbolico e instabile $\forall \mu \in [1,2]$. Poiché

$$(\operatorname{tr} JF(P_1))^2 - 4 \det JF(P_1) = \mu^2 + 2\mu - 7 \begin{cases} > 0 & \text{se } \mu \in (\sqrt{8}-1, 2] \\ = 0 & \text{se } \mu = \sqrt{8}-1 \\ < 0 & \text{se } \mu \in [1, \sqrt{8}-1) \end{cases}$$

otteniamo che:

- se $\mu \in (\sqrt{8}-1, 2]$, P_1 è un nodo instabile
- se $\mu \in [1, \sqrt{8}-1)$, P_1 è un fuoco instabile
- se $\mu = \sqrt{8}-1$, $JF(P_1)$ ha autovalore $\lambda = \frac{\sqrt{8}}{2}$ con molteplicità algebrica 2 e molteplicità geometrica 1, quindi P_1 è un nodo improprio instabile.

- $P_2 = \left(\frac{2}{\mu-1}, -1\right)$ con $\mu \in (1,2]$. Abbiamo

$$JF(P_2) = \begin{pmatrix} \mu-1 & \frac{\mu+1}{\mu-1} \\ 0 & -\frac{2}{\mu-1} \end{pmatrix}, \quad \det JF(P_2) = -2 < 0, \quad \forall \mu \in (1,2]$$

quindi P_2 è un punto fisso iperbolico di tipo sella $\forall \mu \in (1,2]$.

– Studiamo ora l'esistenza di rette invarianti.

- Dalla seconda componente si trova che $\{y=-1\}$ è un insieme invariante $\forall \mu \in [1,2]$.

Per verificarlo poniamo $I(x,y) = y$ e vale: $\nabla I(x,y) \neq \underline{0}$ $\forall (x,y)$ e

$$\dot{I}(x,y)\Big|_{I=-1} = -x(1+y)\Big|_{y=-1} = 0 \quad \forall (x,y) \in \{y=-1\}.$$

- Non ci sono altre rette invarianti parallele ad uno degli assi, quindi poniamo $I(x,y) = ax+by$ con $a,b \neq 0$ e calcoliamo

$$\dot{I}(x,y)\Big|_{I=c} = ax(\mu+y) + ay - a - bx(1+y)\Big|_{ax+by=c} =$$

$$= (c-by)(\mu+y) + ay - a - b\frac{(c-by)}{a}(1+y) =$$

$$= y^2\left(-b+\frac{b^2}{a}\right) + y\left(c - b\mu + a - \frac{b}{a}c + \frac{b^2}{a}\right) + c\mu - a - \frac{b}{a}c$$

Imponendo $\dot{I}\big|_{I=c} \equiv 0$ si trova quindi $a=b$, $b(2-\mu)=0$, $a=c$,

per cui possiamo concludere che l'insieme $\{x+y=1\}$ è invariante per $\mu=2$.

– Il sistema potrebbe ammettere orbite periodiche che circondino il solo punto fisso P_1 per $\mu \in [1,2)$ (il caso $\mu=2$ è escluso perché la retta invariante $x+y=1$ passa per P_1) e che siano incluse nel semipiano $\{y>-1\}$ (per l'esistenza della retta invariante $y=-1$.

Restringiamoci a $\{y>-1\}$. Se poniamo $\rho(x,y) = \frac{1}{y+1}$ abbiamo

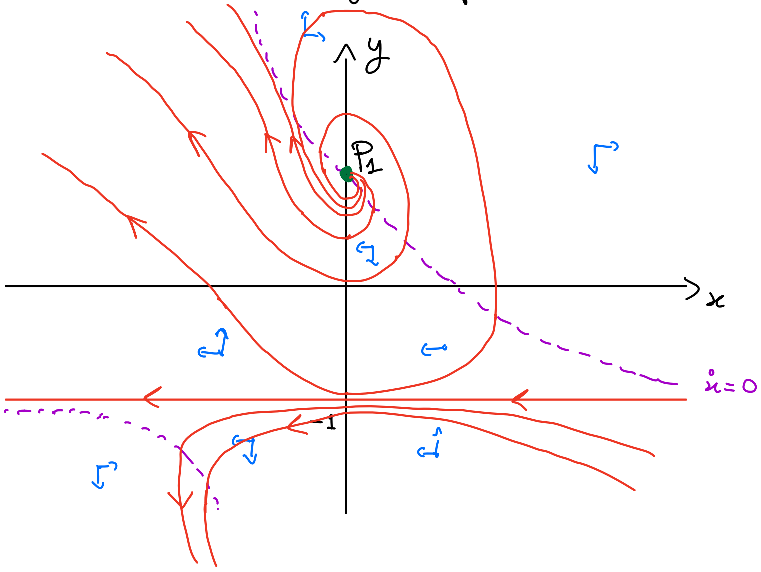
$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho(x,y)\left(x(\mu+y)+y-1\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\rho(x,y)\left(-x(1+y)\right)\right] =$$

$$= \frac{\mu+y}{1+y} > 0 \quad \forall y > -1 \quad e \quad \forall \mu \in [1,2]$$

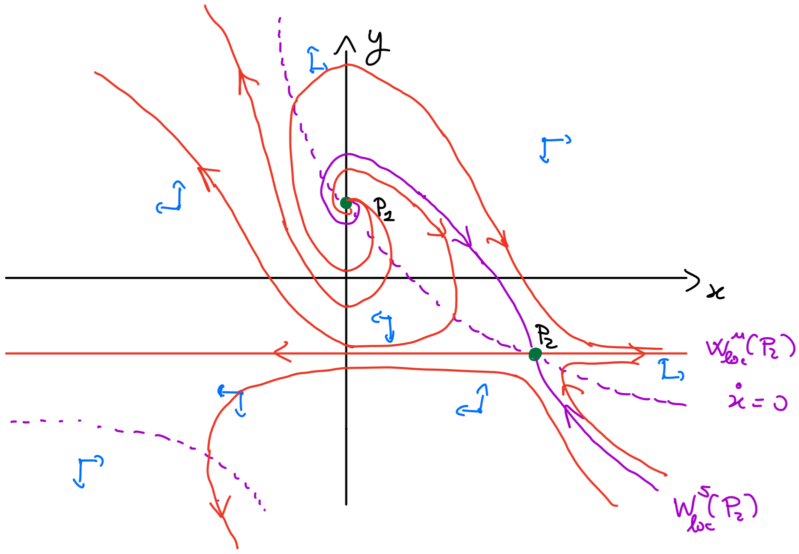
quindi per il criterio di Bendixson-Dulac non possono esistere orbite periodiche.

– Disegniamo ora i ritratti di fase per alcuni valori di $\mu \in [1,2]$.

$\mu = 1$

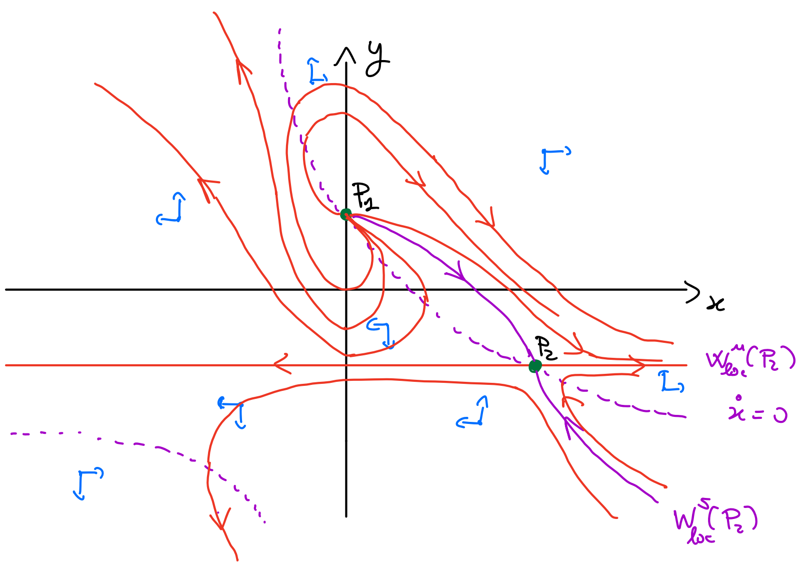


$\mu \in (1, \sqrt{8}-1)$

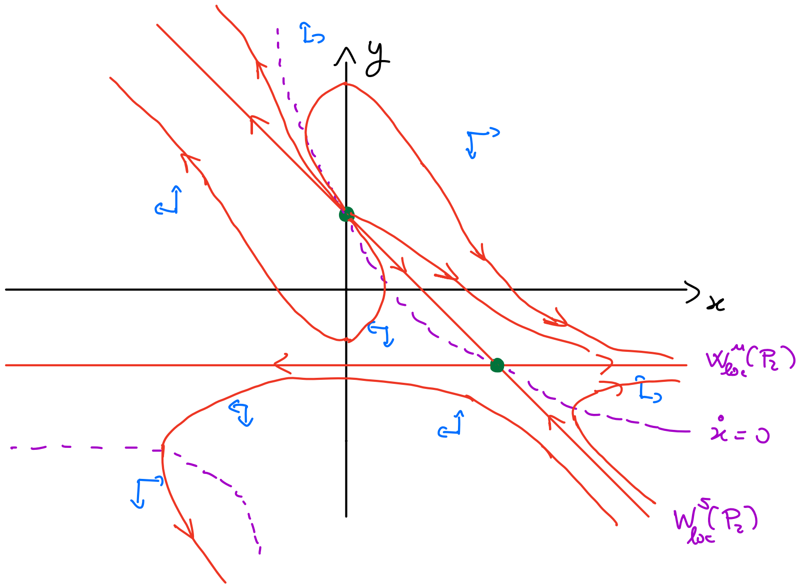


Il caso $\mu = \sqrt{8}-1$ è simile al precedente, cambia solo localmente la dinamica intorno a P_1.

$\mu \in (\sqrt{8}-1, 2)$



$\mu = 2$



$\boxed{\text{ESERCIZIO 2}}$

$$\begin{cases} \dot{x} = y + y^3 \\ \dot{y} = \varepsilon - \cos x \end{cases}, \qquad \varepsilon \in [0, +\infty)$$

Osserviamo che si tratta di un sistema hamiltoniano, seppure non di tipo meccanico, con

$$H(x,y) = \sin x - \varepsilon x + \tfrac{1}{2} y^2 + \tfrac{1}{4} y^4$$

$\boxed{(a)\ \varepsilon = 0}$ Le orbite sono contenute negli insiemi di livello

$$\left\{ \sin x + \tfrac{1}{2} y^2 + \tfrac{1}{4} y^4 = c \right\}_{c \in \mathbb{R}}$$

che non sono di facile rappresentazione, ma possiamo aiutarci anche con uno studio standard delle proprietà del sistema.

I punti fissi sono $\left\{ P_k = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0 \right) \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$ e

$$JF(P_k) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^k & 0 \end{pmatrix}, \qquad \det JF(P_k) = (-1)^{k+1}$$

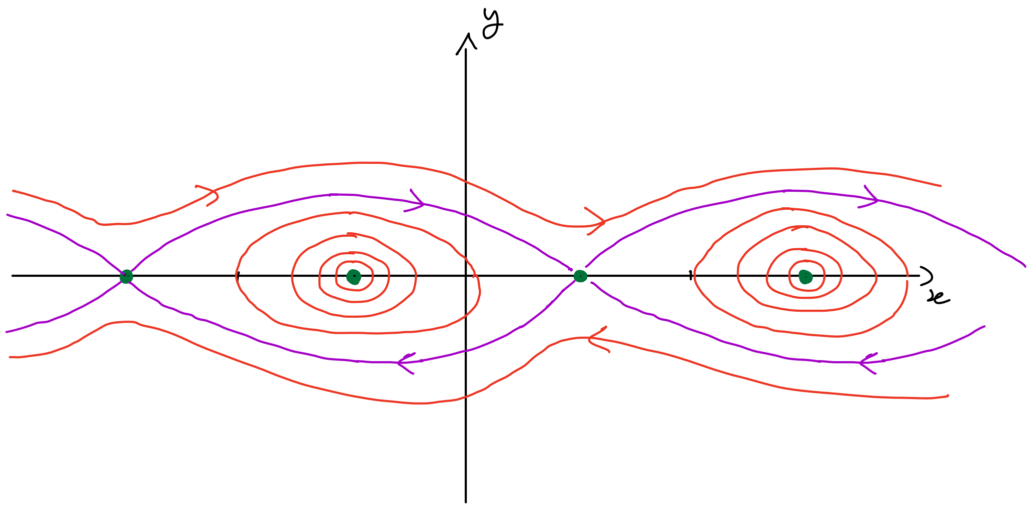
per cui P_k è un punto fisso di tipo $\begin{cases} \text{sella}, & \text{se } k \text{ è pari} \\ \text{centro}, & \text{se } k \text{ è dispari} \end{cases}$

e poiché il sistema è hamiltoniano non ci sono pozzi o sorgenti.

Con queste informazioni possiamo disegnare il ritratto di fase. Osserviamo inoltre che il sistema è simmetrico rispetto alle seguenti trasformazioni:

- $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) = (x(-t), -y(-t))$
- $(\hat{x}(t), \hat{y}(t)) = (x(t)+2\pi, y(t))$

e che $H(P_k) = H(P_{k+2})$ $\forall\, k \in \mathbb{Z}$. Quindi



Il punto $(x_0, y_0) = (0, (\sqrt{5}-1)^{1/2})$ sta sull'insieme di livello $\{H(x,y) = H(0, (\sqrt{5}-1)^{1/2}) = 1\}$, e poiché $H(P_0) = H(\frac{\pi}{2}, 0) = 1$ abbiamo che

$$\omega(0, (\sqrt{5}-1)^{1/2}) = P_0 = (\tfrac{\pi}{2}, 0)$$

$$\alpha(0, (\sqrt{5}-1)^{1/2}) = P_{-2} = (-\tfrac{3}{2}\pi, 0)$$

$\boxed{\text{(b) } \varepsilon > 0}$ Se $\varepsilon \in (0,1)$ si spostano i punti fissi che diventano

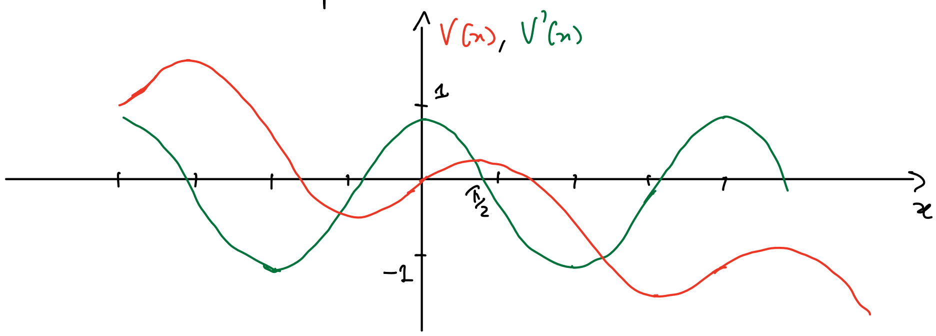
$P_k = (\arccos \varepsilon + 2k\pi, 0)$ e $\tilde{P}_k = (-\arccos \varepsilon + 2k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$,

e

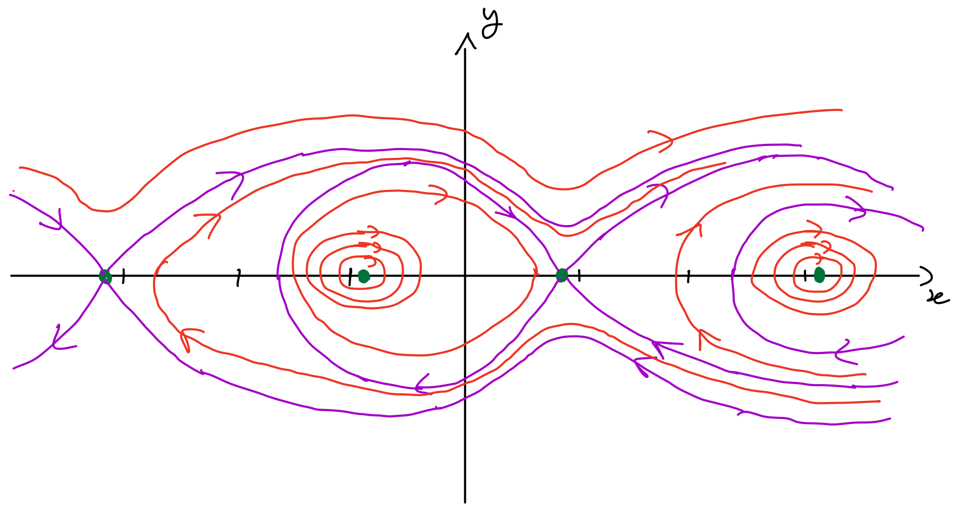
$$JF(P_k) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sqrt{1-\varepsilon^2} & 0 \end{pmatrix}, \quad JF(\tilde{P}_k) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\sqrt{1-\varepsilon^2} & 0 \end{pmatrix}$$

per cui i P_k sono selle e i $\tilde{P}_k$ sono centri. Però adesso

$H(P_k) = \sqrt{1-\varepsilon^2} - \varepsilon(\arccos \varepsilon + 2k\pi) \neq H(P_{k+2})$, per cui non abbiamo più orbite eterocline e inoltre ponendo $V(x) = \sin x - \varepsilon x$ si ha



e $\lim_{x \to \pm\infty} V(x) = \mp\infty$, per cui ricaviamo che il ritratto di fase è di questo tipo.

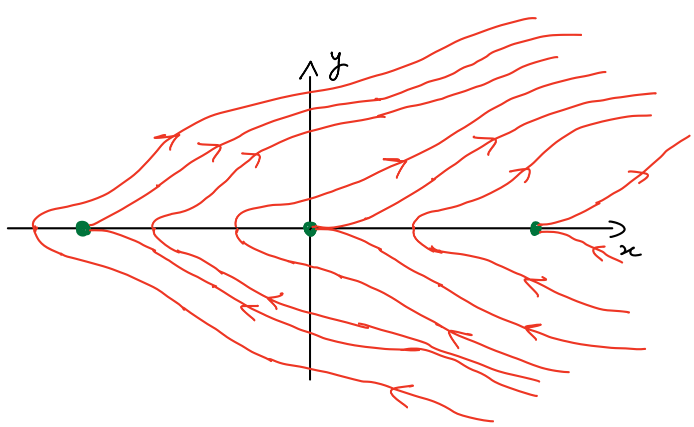


Se $\underline{\varepsilon = 1}$ invece i punti fissi sono $P_k = (2k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$, e

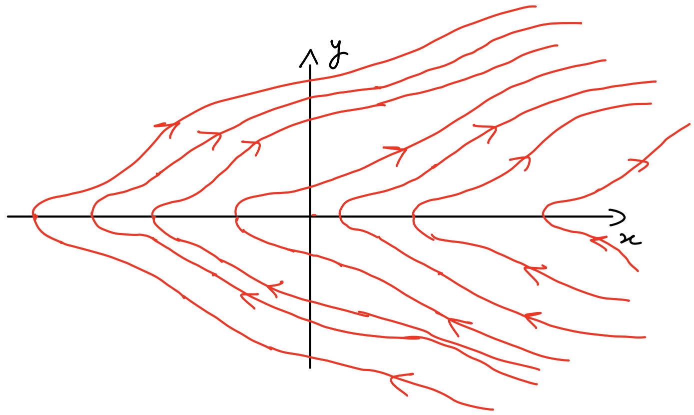
$JF(P_k) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, quindi si tratta di punti fissi degeneri. In questo caso per disegnare il ritratto di fase, vediamo cosa succede in un intorno di $P_0 = (0,0)$.
$H(P_0) = H(0,0) = 0$ e l'insieme di livello $\{ \sin x - x + \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{4} y^4 = 0 \}$ è contenuto nel semipiano $\{x \geq 0\}$ (infatti $h(x) = x - \sin x \geq 0 \iff x \geq 0$). Inoltre

$$\sin x - x + \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{4} y^4 = 0 \iff y^4 + 2y^2 + 4(\sin x - x) = 0 \iff$$
$$y_\pm(x) = \pm \left(-1 + \sqrt{1 + 4(x - \sin x)} \right)^{1/2} \quad \forall\, x \geq 0$$

e $$y_+'(x) = \frac{1}{y_+(x)} \frac{1 - \cos x}{\sqrt{1 + 4(x - \sin x)}} \quad \forall\, x > 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0^+} y_+'(x) = 0.$$



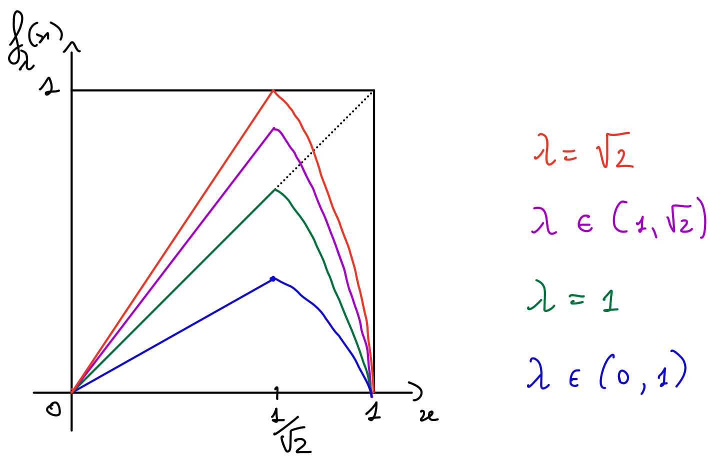
Se $\underline{\varepsilon > 1}$ invece non ci sono punti fissi e $\dot{y} > 0 \ \forall (x,y)$.



ESERCIZIO 3

$$f_\lambda : [0,1] \to [0,1], \qquad f_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda x, & x \in [0, 1/\sqrt{2}] \\ \lambda \sqrt{1-x^2}, & x \in [1/\sqrt{2}, 1] \end{cases}$$

con $\lambda \in [0, \sqrt{2}]$.



(a) Per $\lambda = 0$ vale $f_\lambda(x) \equiv 0$, quindi $x_0 = 0$ è l'unico punto fisso attrattivo. (possiamo anche ignorare questo caso).

Per $\lambda \in (0, \sqrt{2}]$, su $[0, 1/\sqrt{2}]$ si ha $f_\lambda(x) = x \iff x = 0$ e troviamo il punto fisso $x_0 = 0$. Poiché $(f_\lambda)'_+(x_0) = \lambda$ si ha che x_0 è attrattivo se $\lambda \in (0,1)$, repulsivo se $\lambda \in (1, \sqrt{2}]$, e stabile ma non attrattivo se $\lambda = 1$ (infatti $f_1|_{[0, 1/\sqrt{2}]} \equiv id$).
Inoltre per $\lambda = 1$ tutti i punti di $[0, 1/\sqrt{2}]$ sono fissi e sono stabili ma non attrattivi.

Su $[1/\sqrt{2}, 1]$ si ha $f_\lambda(x) = x \iff \lambda\sqrt{1-x^2} = x \iff x = \dfrac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}$ e
$x_1 = \dfrac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} \in [1/\sqrt{2}, 1] \iff \lambda \in [1, \sqrt{2}]$. Quindi per $\lambda = 1$ si trova $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ che

è stato considerato sopra, mentre per $\lambda \in (1, \sqrt{2}]$ si ha

$$f_\lambda'(x_1) = -\frac{\lambda x_1}{\sqrt{1-x_1^2}} = -\lambda^2 < -1$$

e quindi x_1 è repulsivo per $\lambda \in (1, \sqrt{2}]$.

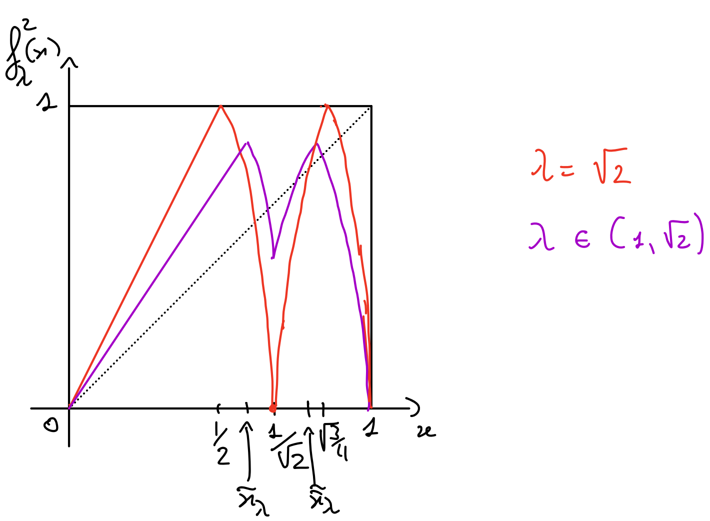
$\boxed{(b)}$ Per $\lambda \in (1, \sqrt{2}]$ si ha $f_\lambda([0, 1/\sqrt{2}]) = f_\lambda([1/\sqrt{2}, 1]) = [0, \lambda/\sqrt{2}] \supset [0, 1/\sqrt{2}]$ quindi $\exists\ \tilde{x}_\lambda \in [0, 1/\sqrt{2}]$ e $\tilde{\tilde{x}}_\lambda \in [1/\sqrt{2}, 1]$ t.c. $f_\lambda(\tilde{x}_\lambda) = f_\lambda(\tilde{\tilde{x}}_\lambda) = 1/\sqrt{2}$ e si trova

$$\tilde{x}_\lambda = \frac{1}{\lambda\sqrt{2}} \qquad , \qquad \tilde{\tilde{x}}_\lambda = \sqrt{1 - \frac{1}{2\lambda^2}}$$

Quindi:

- $f_\lambda^2([0, \tilde{x}_\lambda]) = f_\lambda([0, 1/\sqrt{2}])$ e $\forall x \in [0, \tilde{x}_\lambda]$
$$f_\lambda^2(x) = f_\lambda(\lambda x) = \lambda^2 x$$
- $f_\lambda^2([\tilde{x}_\lambda, 1/\sqrt{2}]) = f_\lambda([1/\sqrt{2}, \lambda/\sqrt{2}])$ e $\forall x \in [\tilde{x}_\lambda, 1/\sqrt{2}]$
$$f_\lambda^2(x) = f_\lambda(\lambda x) = \lambda\sqrt{1-\lambda^2 x^2}$$
- $f_\lambda^2([1/\sqrt{2}, \tilde{\tilde{x}}_\lambda]) = f_\lambda([1/\sqrt{2}, \lambda/\sqrt{2}])$ e $\forall x \in [1/\sqrt{2}, \tilde{\tilde{x}}_\lambda]$
$$f_\lambda^2(x) = f_\lambda(\lambda\sqrt{1-x^2}) = \lambda\sqrt{1-\lambda^2(1-x^2)}$$
- $f_\lambda^2([\tilde{\tilde{x}}_\lambda, 1]) = f_\lambda([0, 1/\sqrt{2}])$ e $\forall x \in [\tilde{\tilde{x}}_\lambda, 1]$
$$f_\lambda^2(x) = f_\lambda(\lambda\sqrt{1-x^2}) = \lambda^2\sqrt{1-x^2}$$

Disegniamo il grafico di f_λ^2.



(c) Dal grafico di f_λ^2 si intuisce che $\exists\, \lambda_0 \in (1, \sqrt{2})$ t.c. f_λ^2 ha un ferro di cavallo per ogni $\lambda \in [\lambda_0, \sqrt{2}]$. Questo è equivalente a $h_{top}(f_\lambda) > 0 \ \forall \lambda \in [\lambda_0, \sqrt{2}]$.

Dimostriamolo. Sia $x_1 = \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}$ il punto fisso per $\lambda \in (1, \sqrt{2}]$.

Poiché $x_1 \in [0, \lambda/\sqrt{2}] = f_\lambda([0, 1/\sqrt{2}])$, $\exists\, y_1 \in [0, 1/\sqrt{2}]$ t.c. $f_\lambda(y_1) = x_1$. Si trova

$$\lambda y_1 = x_1 \iff y_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}$$

Inoltre $\frac{1}{\sqrt{2}} \in (y_1, x_1)$ per $\lambda \in (1, \sqrt{2}]$.

Scegliamo $J = [y_1, x_1] = \left[\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}, \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}\right]$. Allora, poiché

$$f_\lambda^2(y_1) = f_\lambda(x_1) = x_1 = f_\lambda^2(x_1),$$

J ricopre se stesso due volte se

$$f_\lambda^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \le y_1 \iff \lambda\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{2}} \le \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} \iff \lambda^2(2-\lambda^2)(1+\lambda^2) \le 2$$

$$\underset{\lambda^2 = s}{\iff} \quad s(2-s)(1+s) \le 2 \iff s^3 - s^2 - 2s + 2 \ge 0 \iff (s-1)(s^2-2) \ge 0$$

Quindi se $\lambda \in [2^{\frac{1}{4}}, 2^{\frac{1}{2}}]$.