Elementi di Matematica e Statistica
Corso di Laurea in Tecniche per le Costruzioni Civili e la Gestione del Territorio
Compito del 27-01-2025

Esercizio 1. Determinare il dominio naturale D della funzione

$$f(x) = \sqrt{\log x}$$

e dire come si comporta la funzione agli estremi di D.

Esercizio 2. Trovare gli eventuali asintoti orizzontali o obliqui a $\pm\infty$ per la funzione

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$$

Esercizio 3. Determinare l'insieme C dei punti nel quale la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}\,, & \text{se } x > 0; \\ 1\,, & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

è continua, e classificare le eventuali discontinuità.

Esercizio 4. Risolvere con il metodo grafico la disequazione

$$e^x + 3x \geq 1$$

Esercizio 5. Un campione statistico x contiene i seguenti dati

$$x = \{-2, -2, 0, 1, 2, 3, 3, 3\}$$

Rappresentare il campione con un istogramma, e calcolare media e scarto quadratico medio del campione.

Esercizio 6. Dire qual è il segno della permutazione

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 6 & 1 & 7 & 2 & 3 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

usando i tre metodi: (a) incroci, (b) formula a base di sommatoria svolta a lezione, (c) dal numero di scambi. Mostrare il conto nei tre casi.

Esercizio 7. Trovare l'inversa della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

usando l'eliminazione di Gauss.

Esercizio 8. Dire se il sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 13 \end{pmatrix}$$

ammette soluzioni e nel caso determinarle tutte. Trovare il nucleo della matrice dei coefficienti.

ES. 1

$$f(x) = \sqrt{\log x}$$

Il dominio naturale di f è dato da

$$D = \{ x \in \mathbb{R} \ / \ x > 0, \ \log x \geq 0 \}$$

Poiché $\log x \geq 0 \iff x \geq 1$, si trova

$$\underline{D = [1, +\infty)}$$

Gli estremi di D sono dunque 1 e $+\infty$. Poiché $1 \in D$ si può valutare $\underline{f(1) = 0}$, mentre per $+\infty$ calcoliamo

$$\underline{\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\log x} = +\infty}$$

ES. 2

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$$

Il dominio naturale di f è $D = \{ x \in \mathbb{R} \ / \ x - 2 \neq 0 \} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Verifichiamo l'esistenza di asintoti a $\pm\infty$.

Per quanto riguarda $+\infty$, si ha

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 3}{x - 2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x} \, \frac{1 - 3/x^2}{1 - 2/x} = \lim_{x \to +\infty} x \cdot \frac{1}{1} = +\infty$$

quindi f non ha un asintoto orizzontale a $+\infty$. Vediamo se ha un asintoto obliquo. Calcoliamo

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 3}{x(x - 2)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 3}{x^2 - 2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2} \, \frac{1 - 3/x^2}{1 - 2/x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} 1 \cdot \frac{1}{1} = 1$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - a x] = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{x^2 - 3}{x - 2} - x \right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 3 - x^2 + 2x}{x - 2} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2x - 3}{x - 2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x} \, \frac{2 - 3/x}{1 - 2/x} = \lim_{x \to +\infty} 1 \cdot \frac{2}{1} = 2$$

Quindi f ha asintoto obliquo a $+\infty$ dato da $\underline{y = x + 2}$

Per quanto riguarda $-\infty$, operiamo analogamente.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-3}{x-2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x}\,\frac{1-3/x^2}{1-2/x} = \lim_{x\to-\infty} x\cdot\frac{1}{1} = -\infty$$

quindi f non ha un asintoto orizzontale a ∞. Vediamo se ha un asintoto obliquo. Calcoliamo

$$a = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-3}{x(x-2)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-3}{x^2-2x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2}\,\frac{1-3/x^2}{1-2/x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} 1\cdot\frac{1}{1} = 1$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} \left[f(x)-ax\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2-3}{x-2} - x\right] = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-3-x^2+2x}{x-2} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2x-3}{x-2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x}\,\frac{2-3/x}{1-2/x} = \lim_{x\to-\infty} 1\cdot\frac{2}{1} = 2$$

Quindi f ha asintoto obliquo a $-\infty$ dato da $y = x+2$

ES. 3

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{se } x>0 \\ 1, & \text{se } x\le 0 \end{cases}$$

Il dominio naturale di f è $D=\mathbb{R}$. Inoltre su $(0,+\infty)$ e $(-\infty,0)$, separatamente, si scrive come prodotto e composizione di funzioni continue, quindi f è continua certamente in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Resta da valutare come si comporta in 0. Affinché f sia continua in 0 deve verificarsi $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 1$. Calcoliamo

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$, per un limite notevole;

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} 1 = 1.$$

Quindi $\lim_{x\to0} f(x)$ esiste ed è uguale a $f(0)=1$. Dunque f è continua anche in 0, e allora $C=\mathbb{R}$.

ES. 4

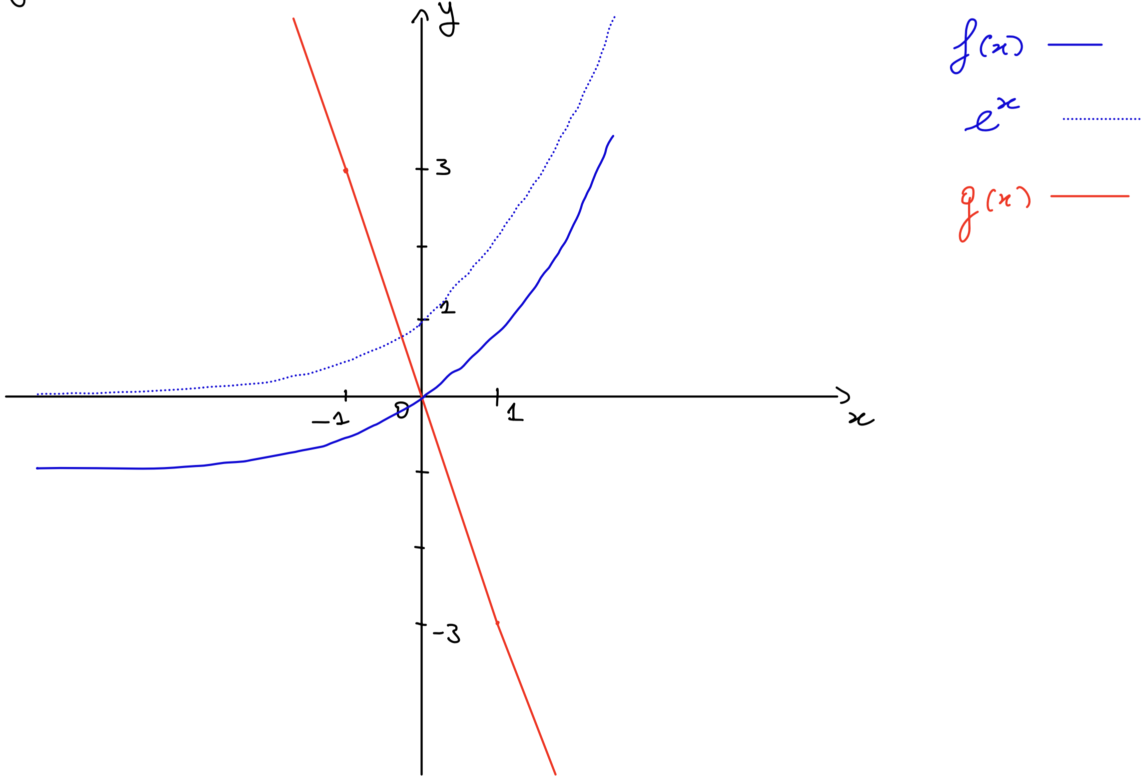
$$e^x + 3x \geq 1$$

Per ricondurci a funzioni il cui grafico è facile da disegnare, riscriviamo la disequazione come

$$e^x - 1 \geq -3x$$

e poniamo $f(x) = e^x - 1$, $g(x) = -3x$.

Per disegnare il grafico di f, partiamo dal grafico di e^x e lo trasliamo verso il basso di 1. Il grafico di g è invece la retta $y = -3x$. Quindi

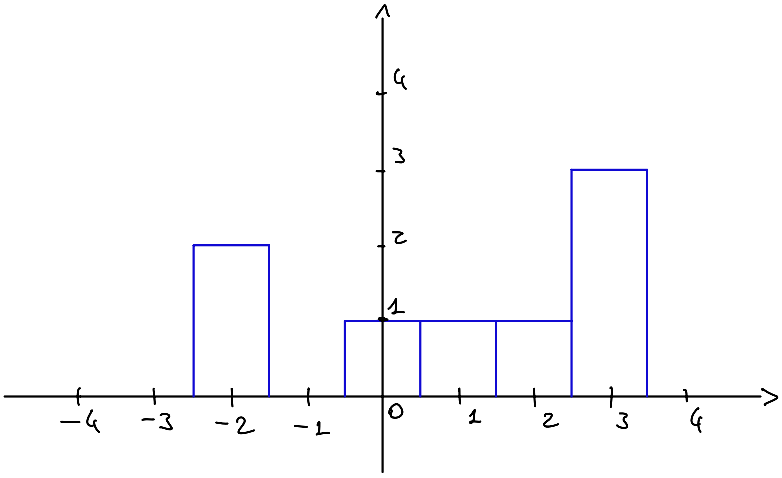


Quindi $f(x) \geq g(x)$ per $x \geq 0$.

ES. 5

$$x = \{-2, -2, 0, 1, 2, 3, 3, 3\}$$

L'istogramma relativo al campione statistico x è



La media $\bar{x}$ del campione si calcola come

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

dove N è la numerosità del campione, in questo caso $N=8$, e x_i sono i dati. Quindi

$$\bar{x} = \frac{1}{8}\left(-2-2+0+1+2+3+3+3\right) = 1$$

Lo scarto quadratico medio del campione $\sigma(x)$ si calcola come

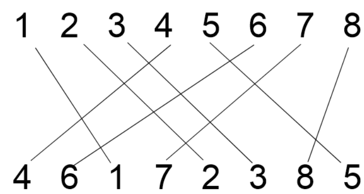
$$\sigma(x) = \sqrt{var(x)} = \sqrt{\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right) - \bar{x}^2}$$

quindi

$$\sigma(x) = \left(\frac{1}{8}\left((-2)^2+(-2)^2+0^2+1^2+2^2+3^2+3^2+3^2\right) - 1^2\right)^{1/2} =$$

$$= \sqrt{4} = 2$$

[redacted] Soluzione esercizio [redacted] 6



Sono 11 incroci quindi il segno è negativo.

Sia f_i il numero di elementi sulla destra di $\sigma(i)$ più piccoli di $\sigma(i)$. Si ha

$$\sum_{i=1}^{8} f_i = 3 + 4 + 0 + 3 + 0 + 0 + 1 + 0 = 11$$

che è dispari quindi il segno della permutazione è negativo.

Col numero di scambi, rappresentati qui dal passaggio di riga in riga,

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 & 7 & 2 & 3 & 8 & 5 \\ 4 & 6 & 1 & 7 & 2 & 3 & 5 & 8 \\ 4 & 6 & 1 & 5 & 2 & 3 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 2 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

sono 7 scambi quindi il segno è negativo.

[redacted] Soluzione esercizio [redacted] 7

$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

[redacted] Soluzione esercizio [redacted] 8

Il determinante della matrice è nullo quindi la soluzione se esiste non è unica

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 5 & -4 \end{pmatrix} = -8 - 1 + 10 + 5 - 8 + 2 = 0$$

Con la riduzione di Gauss, affiancando matrice dei coefficienti e termine noto,

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 13 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il numero di pivot della matrice ridotta e completa sono uguali (2) quindi il sistema ha soluzione. Proseguendo

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Una soluzione particolare si ottiene con $z = 0$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mentre il nucleo è dato dagli elementi della forma (esprimiamo x, y in funzione di z)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{z}{4} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

con z arbitrario. Quindi la soluzione generale si scrive

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{z}{4} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

con z arbitrario.