Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Gestionale
Compito del 26-07-2017

- *È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche la brutta e il testo.*
- *Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.*

Esercizio 1. (10 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = 2y^4 - 4y^3 - 4x^2$$

i) trovare tutti i punti critici e, se possibile, caratterizzarli come punti di massimo locale, minimo locale o sella. Dire se la funzione ammette massimo assoluto e minimo assoluto;

ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\bar{\Omega} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 + y^4 \le 1\right\} .$$

Esercizio 2. (10 punti) Calcolare l'integrale

$$\iint_\Omega \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy$$

dove $\Omega = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 + y^2 \le 4 \, , \, y \ge x \, , \, y \ge \sqrt{1+x^2} - 1\Big\}$.

Esercizio 3. (10 punti) Dato il campo di vettori

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2+y^2} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2-1}} \\ \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2-1}} \end{pmatrix}$$

i) studiare le proprietà del campo sul suo dominio naturale;

ii) calcolare il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo la curva (γ, I), con $I = [0, \frac{\pi}{2}]$ e parametrizzazione

$$\gamma : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2 \, , \qquad \gamma(t) = \left(2 + \sin t \, , \, e^{\sin(4t)} - 1\right)$$

Svolgimento

Esercizio 1. *Data la funzione*

$$f(x,y) = 2y^4 - 4y^3 - 4x^2$$

i) trovare tutti i punti critici e, se possibile, caratterizzarli come punti di massimo locale, minimo locale o sella. Dire se la funzione ammette massimo assoluto e minimo assoluto;

La funzione è un polinomio definito su tutto $\mathbb{R}^2$, dunque è anche differenziabile su tutto $\mathbb{R}^2$. Per trovare i punti critici dobbiamo dunque risolvere il sistema $\nabla f(x,y) = 0$, ossia

$$\begin{cases} -8x = 0 \\ 8y^3 - 12y^2 = 0 \end{cases}$$

La seconda equazione si riscrive come $4y^2(2y-3) = 0$, e ha dunque soluzioni $y = 0, \frac{3}{2}$. La prima equazione ha soluzione $x = 0$. Dunque i punti critici risultano essere

$$C_1 = (0,0) \qquad C_2 = \left(0\,,\,\frac{3}{2}\right)$$

Per caratterizzare i due punti critici andiamo a calcolare la matrice Hessiana di f. Osserviamo che essendo f un polinomio, è una funzione differenziabile due volte su tutto il dominio, dunque la matrice Hessiana sarà simmetrica. In particolare troviamo

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 24y^2 - 24y \end{pmatrix}.$$

Sostituendo i punti critici troviamo:

$$Hf(C_1) = Hf(0,0) = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

si ha $\det Hf(C_1) = 0$, dunque C_1 è punto non classificabile. La matrice Hessiana risulta semidefinita negativa, dunque C_1 è punto di sella o punto di massimo locale.

$$Hf(C_2) = Hf\left(0\,,\,\frac{3}{2}\right) = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 18 \end{pmatrix},$$

si ha $\det Hf(C_2) = -144 < 0$, dunque C_2 è punto di sella.

Per determinare esistenza di massimo e minimo assoluto, studiamo innanzitutto il comportamento della funzione lungo gli assi. Otteniamo

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x,0) = \lim_{x\to\pm\infty} (-4x^2) = -\infty$$

da cui $\inf f = -\infty$, e quindi non esiste minimo assoluto. Inoltre

$$\lim_{y\to\pm\infty} f(0,y) = \lim_{y\to\pm\infty} (2y^4 - 4y^3) = +\infty$$

da cui $\sup f = +\infty$, e quindi non esiste massimo assoluto.

Approfondimento: riguardo al punto critico $C_1 = (0,0)$, è possibile stabilire che si tratta di un punto di sella. Lo studio della matrice Hessiana ci mostra che il punto è di massimo locale se ci muoviamo lungo l'asse x (infatti $f(x,0) = -4x^2$). Se ci muoviamo invece lungo l'asse y otteniamo $f(0,y) = 2y^4 - 4y^3 = 2y^3(y-2)$. Dunque $f(C_1) = 0$, e per $y \in (0,2)$ la funzione risulta negativa, mentre per $y < 0$ risulta positiva. Dunque C_1 soddisfa la definizione di punto di sella.

ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ su

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 + y^4 \leq 1\right\} .$$

L'insieme Ω è rappresentato nella figura 1. Per studiare massimo e minimo assoluto di f su Ω

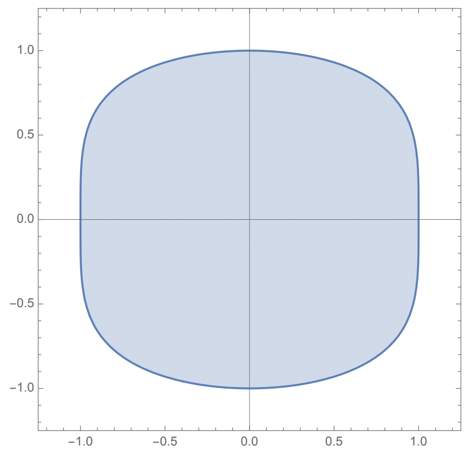

Figure 1: L'insieme Ω.

dobbiamo considerare i valori che la funzione assume su eventuali punti di non differenziabilità, sui punti critici liberi interni a Ω , sui punti critici vincolati al bordo di Ω e sugli eventuali spigoli del bordo.

Abbiamo visto che f è differenziabile su tutto $\mathbb{R}^2$. I punti critici liberi sono due, ma solo $C_1 = (0,0)$ è interno a Ω.

Ci rimane da studiare il comportamento di f sul bordo di $\bar{\Omega}$. Possiamo non considerare spigoli sul bordo dell'insieme, possiamo infatti scrivere il bordo come

$$\Gamma = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 + y^4 = 1\right\}$$

quindi insieme di livello della funzione differenziabile $G(x,y) = x^2 + y^4$. Il gradiente di G non si annulla su Γ, e possiamo quindi applicare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, e cercare soluzioni (x,y,λ) del sistema

$$\begin{cases} -8x = \lambda\, 2x \\ 8y^3 - 12y^2 = \lambda\, 4y^3 \\ x^2 + y^4 = 1 \end{cases}$$

Studiando la prima equazione otteniamo che il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x = 0 \\ 8y^3 - 12y^2 = \lambda\, 4y^3 \\ x^2 + y^4 = 1 \end{cases} \qquad \bigcup \qquad \begin{cases} x \neq 0 \\ \lambda = -4 \\ 8y^3 - 12y^2 = \lambda\, 4y^3 \\ x^2 + y^4 = 1 \end{cases}$$

Dal primo sotto-sistema si ottengono i primi due punti critici vincolati

$$Q_1 = (0, -1) \qquad Q_2 = (0, 1)$$

Nel secondo sotto-sistema, sostituendo la seconda nella terza si trova

$$24y^3 - 12y^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 12y^2(2y - 1) = 0$$

da cui si trovano le soluzioni $y = 0, \frac{1}{2}$. Usando la condizione sul vincolo $x^2 + y^4 = 1$, si trovano quindi gli altri punti critici vincolati

$$Q_3 = (-1, 0) \quad Q_4 = (1, 0) \quad Q_5 = \left(-\frac{\sqrt{15}}{4}, \frac{1}{2} \right) \quad Q_6 = \left(\frac{\sqrt{15}}{4}, \frac{1}{2} \right)$$

I valori che dobbiamo confrontare sono dunque

$$f(C_1) = 0 \quad f(Q_1) = 6 \quad f(Q_2) = -2 \quad f(Q_3) = f(Q_4) = -4$$

$$f(Q_5) = f(Q_6) = -\frac{33}{8}$$

Dunque il massimo di f è 6 e il minimo è $-\frac{33}{8}$.

Approfondimento: era possibile studiare il comportamento della funzione sul bordo di Ω anche con il metodo diretto, ad esempio considerando due spigoli $S_1 = (0, -1)$ e $S_2 = (0, 1)$, e le due parametrizzazioni $\gamma_1(t) = (-\sqrt{1 - t^4}, t)$ e $\gamma_2(t) = (\sqrt{1 - t^4}, t)$, con $t \in [-1, 1]$.

Esercizio 2. *Calcolare l'integrale*

$$\iint_\Omega \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dx\, dy$$

dove $\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq 4\,,\ y \geq x\,,\ y \geq \sqrt{1 + x^2} - 1 \right\}$.

Osserviamo che $\sqrt{1 + x^2} - 1 \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, dunque $y \geq 0$, e inoltre $\sqrt{1 + x^2} - 1 \leq x$ per $x \geq 0$ e $\sqrt{1 + x^2} - 1 > x$ per $x < 0$. Otteniamo allora l'insieme Ω rappresentato nella figura 2.

La funzione da integrare e il dominio suggeriscono di risolvere l'integrale usando il cambiamento di variabili in coordinate polari, ossia

$$\psi(\rho, \theta) = (x, y) \quad \text{con} \quad \begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \end{cases} \quad \text{e} \quad |\det J_\psi(\rho, \theta)| = \rho\,.$$

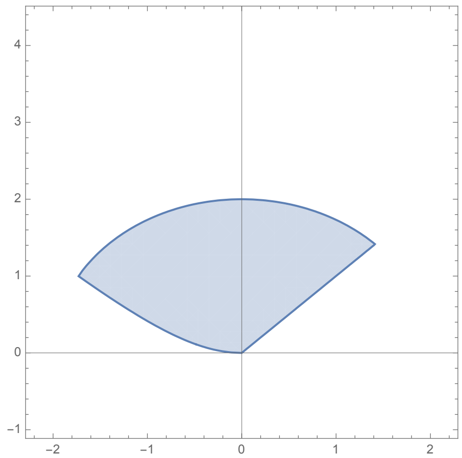

Figure 2: L'insieme Ω.

Dunque ponendo S l'insieme tale che $\psi(S) = \Omega$, abbiamo

$$\iint_\Omega \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy = \iint_S 1\, d\rho\, d\theta\,.$$

Determiniamo adesso S e proviamo a scriverlo come insieme semplice. Dalla definizione di Ω troviamo

$$S = \Big\{(\rho,\theta) \in [0,+\infty) \times [-\pi,\pi] \,:\, \rho^2 \leq 4\,,\, \rho\sin\theta \geq \rho\cos\theta\,,\, \rho\sin\theta \geq \sqrt{1+\rho^2\cos^2\theta} - 1\Big\}$$

Le prime due condizioni ci dicono che

$$\rho \in [0,2] \quad \text{e} \quad \theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi\right]\,.$$

Abbiamo visto che dalla terza ricaviamo $y \geq 0$, e quindi in particolare, come si evince dal disegno, possiamo restringerci all'insieme

$$\rho \in [0,2] \quad \text{e} \quad \theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]\,.$$

La terza condizione per S si riscrive invece, osservando che $\rho\sin\theta + 1 > 0$ per ogni $\theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$, come

$$(\rho\sin\theta + 1)^2 \geq 1 + \rho^2\cos^2\theta$$

e quindi come

$$\rho(\sin^2\theta - \cos^2\theta) + 2\sin\theta \geq 0\,.$$

Per scrivere ρ in funzione di θ dobbiamo considerare le soluzioni dei sue sistemi

$$\begin{cases} \theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \pi\right] \\ \sin^2\theta - \cos^2\theta > 0 \\ \rho \geq -\frac{2\sin\theta}{\sin^2\theta - \cos^2\theta} \end{cases} \qquad \bigcup \qquad \begin{cases} \theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \pi\right] \\ \sin^2\theta - \cos^2\theta < 0 \\ \rho \leq \frac{2\sin\theta}{\cos^2\theta - \sin^2\theta} \end{cases}$$

in cui consideriamo anche le restrizioni già ottenute per θ.

Per il primo sistema otteniamo

$$\begin{cases} \theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \pi\right] \\ \sin^2\theta - \cos^2\theta > 0 \\ \rho \geq -\frac{2\sin\theta}{\sin^2\theta - \cos^2\theta} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right] \\ \rho \geq -\frac{2\sin\theta}{\sin^2\theta - \cos^2\theta} \end{cases}$$

e osserviamo che la funzione che limita ρ dal basso è negativa, dunque la disuguaglianza è sempre verificata.

Per il secondo sistema invece otteniamo

$$\begin{cases} \theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \pi\right] \\ \sin^2\theta - \cos^2\theta < 0 \\ \rho \leq \frac{2\sin\theta}{\cos^2\theta - \sin^2\theta} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \theta \in \left[\frac{3}{4}\pi, \pi\right] \\ \rho \leq \frac{2\sin\theta}{\cos^2\theta - \sin^2\theta} \end{cases}$$

L'insieme S è quindi quello rappresentato in figura 3 con ρ sulle ascisse e θ sulle ordinate. Per

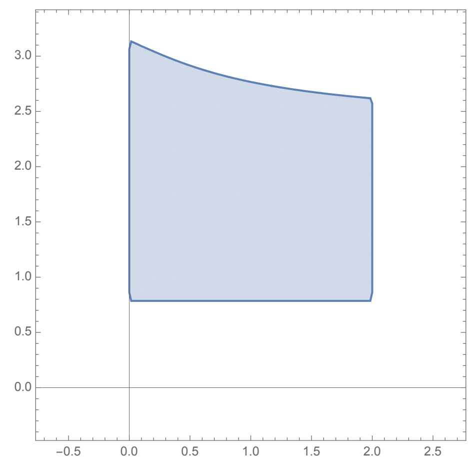

Figure 3: L'insieme S.

scriverlo come insieme semplice dobbiamo trovare la soluzione in $[\frac{\pi}{4}, \pi]$ di

$$\frac{2\sin\theta}{\cos^2\theta - \sin^2\theta} = 2$$

che è equivalente a

$$2\sin^2\theta + \sin\theta - 1 = 0$$

e dunque ha soluzione in $[\frac{\pi}{4}, \pi]$ data da $\theta = \frac{5}{6}\pi$. Possiamo dunque scrivere S come unione di due insiemi semplici,

$$S = \left\{(\rho, \theta) \, : \, \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{5}{6}\pi \, , \, 0 \leq \rho \leq 2\right\} \quad \bigcup \quad \left\{(\rho, \theta) \, : \, \frac{5}{6}\pi \leq \theta \leq \pi \, , \, 0 \leq \rho \leq \frac{2\sin\theta}{\cos^2\theta - \sin^2\theta}\right\} .$$

Dunque

$$\iint_\Omega \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \, dx \, dy = \iint_S 1 \, d\rho \, d\theta =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{6}\pi} \left(\int_0^2 1\, d\rho \right) d\theta + \int_{\frac{5}{6}\pi}^{\pi} \left(\int_0^{\frac{2\sin\theta}{\cos^2\theta - \sin^2\theta}} 1\, d\rho \right) d\theta =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{6}\pi} 2\, d\theta + \int_{\frac{5}{6}\pi}^{\pi} \frac{2\sin\theta}{\cos^2\theta - \sin^2\theta}\, d\theta \;=\; 2\theta\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{6}\pi} + \int_{-1}^{-\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{t^2 - \frac{1}{2}}\, dt =$$

$$= \frac{7}{6}\pi + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\log\left| t - \frac{1}{\sqrt{2}} \right| - \log\left| t + \frac{1}{\sqrt{2}} \right| \right) \Big|_{-1}^{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{7}{6}\pi + \frac{1}{\sqrt{2}} \log\left(\frac{5 + 2\sqrt{6}}{3 + 2\sqrt{2}} \right).$$

Abbiamo usato nel secondo integrale il cambio di variabile $t = \cos\theta$.

Approfondimento: il valore di $\theta = \frac{5}{6}\pi$, si può trovare anche cercando le coordinate polari del punto con ascissa negativa di intersezione tra la circonferenza $x^2+y^2 = 4$ e la curva $y = \sqrt{1 + x^2} - 1$.

Esercizio 3. *Dato il campo di vettori*

$$\mathbf{F}(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2+y^2} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2-1}} \\ \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2-1}} \end{pmatrix}$$

i) studiare le proprietà del campo sul suo dominio naturale;

Entrambe le componenti del campo hanno come dominio naturale l'insieme

$$X = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 - 1 > 0 \right\}$$

che è quindi il dominio naturale di $\mathbf{F}$, e su X il campo risulta essere differenziabile. Per studiare le proprietà del campo su X, iniziamo a calcolare il rotore. Si ha

$$\mathrm{rot}(\mathbf{F})(x, y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y)$$

Calcoliamo separatamente le due derivate.

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y) = \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{-xy}{(x^2 + y^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) = \frac{-x^2 - y^2 + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{-xy}{(x^2 + y^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}$$

Quindi il campo $\mathbf{F}$ è irrotazionale.

Il dominio X non è semplicemente connesso, avendo come "buco" il disco $D = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$. Per verificare se il campo è conservativo bisogna dunque calcolarne il lavoro lungo una curva chiusa che vada intorno a D. Scegliamo la circonferenza

$$\tilde{\gamma} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad \tilde{\gamma}(t) = \Big(2\cos t\,,\, 2\sin t \Big)$$

che verifica

$$\tilde{\gamma}'(t) = \begin{pmatrix} -2\sin t \\ 2\cos t \end{pmatrix}$$

Quindi

$$L(\mathbf{F},\tilde{\gamma}) = \int_0^{2\pi} < \mathbf{F}(\tilde{\gamma}(t))\,,\,\tilde{\gamma}'(t) > \,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\left(-\frac{2\sin t}{4\cos^2 t + 4\sin^2 t} + \frac{2\cos t}{\sqrt{4\cos^2 t + 4\sin^2 t - 1}} \right) (-2\sin t) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{2\cos t}{4\cos^2 t + 4\sin^2 t} + \frac{2\sin t}{\sqrt{4\cos^2 t + 4\sin^2 t - 1}} \right) (2\cos t) \right] dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\sin^2 t - \frac{4}{\sqrt{3}}\,\sin t\,\cos t + \cos^2 t + \frac{4}{\sqrt{3}}\,\sin t\,\cos t \right] dt = \int_0^{2\pi} 1\,dt = 2\pi$$

Dunque il campo $\mathbf{F}$ non è conservativo nel suo dominio naturale.

Approfondimento: si poteva anche osservare che il campo $\mathbf{F}$ si scrive come la somma di due campi, $\mathbf{G}$ e $\mathbf{H}$, dati da

$$\mathbf{G}(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{H}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2-1}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2-1}} \end{pmatrix}$$

Il campo $\mathbf{G}$ è noto essere un campo irrotazionale ma non conservativo sul suo dominio naturale. Il campo $\mathbf{H}$ è invece conservativo sul suo dominio naturale, come si dimostra osservando che la funzione $f(x) = \sqrt{x^2+y^2-1}$ è un suo potenziale sul dominio naturale.

Dunque il campo $\mathbf{F}$ è necessariamente irrotazionale, essendo la somma di due campi irrotazionali, e non può essere conservativo, perché altrimenti lo sarebbe anche $\mathbf{G}$.

ii) calcolare il lavoro di $\mathbf{F}$ *lungo la curva* (γ, I)*, con* $I = [0, \frac{\pi}{2}]$ *e parametrizzazione*

$$\gamma : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \gamma(t) = \left(2 + \sin t\,,\, e^{\sin(4t)} - 1\right)$$

Studiamo le proprietà della curva (γ, I). La curva non è chiusa, essendo $\gamma(0) = (2,0)$ e $\gamma(\frac{\pi}{2}) = (3,0)$, e il sostegno è disegnato in figura 4. Per il calcolo del lavoro potremmo utilizzare la definizione, ma i calcoli sembrano piuttosto complicati. Sembra più semplice utilizzare invece il fatto che il campo $\mathbf{F}$, essendo irrotazionale, è conservativo su ogni sottoinsieme Ω del suo dominio naturale X, che sia semplicemente connesso. In particolare, ci interessa che Ω contenga il sostegno della curva (γ, I). Possiamo ad esempio scegliere

$$\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x > \frac{3}{2} \right\}$$

L'insieme Ω verifica tutte le proprietà richieste, e dunque $\mathbf{F}$ ristretto a Ω è conservativo. Per il calcolo del lavoro, possiamo allora usare il fatto che il lavoro per i campi conservativi è uguale per due curve con sostegno contenuto in Ω e stessi punti iniziale e finale. Definiamo allora la curva

$$\bar{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \bar{\gamma}(t) = \left(2 + t\,,\, 0\right)$$

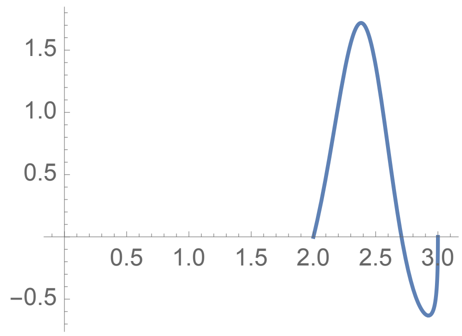

Figure 4: Il sostegno della curva (γ, I).

che verifica $\bar{\gamma}(0) = (2,0)$ e $\bar{\gamma}(1) = (3,0)$, e ha sostegno tutto contenuto in Ω, e inoltre

$$\bar{\gamma}'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$L(\mathbf{F}, \gamma) = L(\mathbf{F}, \bar{\gamma}) = \int_0^1 < \mathbf{F}(\bar{\gamma}(t))\,,\, \bar{\gamma}'(t) > \, dt =$$

$$= \int_0^1 \left[\left(-\frac{0}{(2+t)^2 + 0} + \frac{2+t}{\sqrt{(2+t)^2 + 0 - 1}} \right) (1) + \left(\frac{2+t}{(2+t)^2 + 0} + \frac{0}{\sqrt{(2+t)^2 + 0 - 1}} \right) (0) \right] dt$$

$$= \int_0^1 \frac{2+t}{\sqrt{t^2 + 4t + 3}}\, dt = \sqrt{t^2 + 4t + 3}\Big|_0^1 = 2\sqrt{2} - \sqrt{3}\,.$$