Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Gestionale
Compito del 23-07-2015 - A

Esercizio 1. (10 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + 4xy - 8x - 4y + 4$$

i) trovare tutti i punti critici e, se possibile, caratterizzarli come punti di massimo locale, minimo locale o sella;

ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ sul triangolo di vertici

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2. (10 punti) Calcolare l'area dell'insieme

$$\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq 1 \,,\, y \leq \frac{1}{4}\sqrt{4 - x^2} \right\}.$$

Esercizio 3. (10 punti) Data la curva (γ, I), con $I = \left[\frac{\pi}{2}, 2\pi\right]$ e parametrizzazione

$$\gamma : \left[\frac{\pi}{2}, 2\pi\right] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \gamma(t) = \Big(1 + t\cos t\,,\, t\sin t\Big)$$

i) scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente al sostegno della curva nel punto $P = (1 - \pi\,,\, 0)$;

ii) calcolare il lavoro lungo la curva (γ, I) del campo di vettori

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x-y}{x^2+y^2} \\ \frac{x+y}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

Svolgimento

Esercizio 1. *Data la funzione*

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + 4xy - 8x - 4y + 4$$

i) trovare tutti i punti critici e, se possibile, caratterizzarli come punti di massimo locale, minimo locale o sella;

La funzione è un polinomio definito su tutto $\mathbb{R}^2$, dunque è anche di classe C^1 su tutto $\mathbb{R}^2$. Per trovare i punti critici dobbiamo dunque risolvere il sistema $\nabla f(x,y) = 0$, ossia

$$\begin{cases} 2x + 4y - 8 = 0 \\ 2y + 4x - 4 = 0 \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ricava $x = 4 - 2y$, e sostituendo nella seconda otteniamo

$$-6y + 12 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 2\,.$$

Dunque f ha un solo punto critico, dato da

$$C = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Per caratterizzarlo andiamo a calcolare la matrice Hessiana di f. Osserviamo che essendo f un polinomio, è una funzione anche di classe C^2 su tutto il dominio, dunque la matrice Hessiana sarà simmetrica. In particolare troviamo

$$Hf(x,y) = Hf(0,2) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si ha $\det Hf(0,2) = -12 < 0$. Dunque P è un punto di sella.

ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ sul triangolo di vertici

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Il triangolo, chiamiamolo $\bar{\Omega}$, è rappresentato nella figura 1.

Per studiare massimo e minimo assoluto di f su $\bar{\Omega}$ dobbiamo considerare i valori che la funzione assume sui punti critici liberi interni a $\bar{\Omega}$, sui punti critici vincolati al bordo di $\bar{\Omega}$, e sugli eventuali spigoli del bordo e punti di non derivabilità della funzione.

La funzione f non ha punti di non derivabilità, e il punto critico trovato al punto i) non è interno all'insieme $\bar{\Omega}$.

Ci rimane da studiare il comportamento di f sul bordo di $\bar{\Omega}$. Gli spigoli sono i punti

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

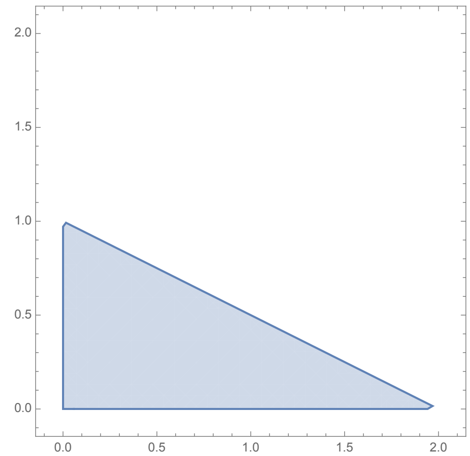

Figure 1: L'insieme $\bar{\Omega}$.

Parametrizziamo ora i tre segmenti del bordo. Troviamo

$$\gamma_1(t) = (1-t)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad t \in [0,1]$$

$$\gamma_2(t) = (1-t)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}, \qquad t \in [0,1]$$

$$\gamma_3(t) = (1-t)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ 1-t \end{pmatrix}, \qquad t \in [0,1]$$

Componiamo con f e otteniamo le funzioni di una variabile

$$g_1(t) = f(\gamma_1(t)) = 4t^2 - 16t + 4\,, \qquad t \in [0,1]$$

$$g_2(t) = f(\gamma_2(t)) = t^2 - 4t + 4\,, \qquad t \in [0,1]$$

$$g_3(t) = f(\gamma_3(t)) = -3t^2 - 6t + 1\,, \qquad t \in [0,1]$$

Tutte le funzioni sono sempre derivabili e gli estremi dei loro domini corrispondono agli spigoli. Dunque ci rimane di trovare i punti critici delle tre funzioni.

Per g_1 si trova $g_1'(t) = 8t - 16$, che si annulla per $t = 2$, quindi mai nell'intervallo $[0,1]$.
Per g_2 si trova $g_2'(t) = 2t - 4$, che si annulla per $t = 2$, quindi mai nell'intervallo $[0,1]$.
Per g_3 si trova $g_3'(t) = -6t - 6$, che si annulla per $t = -1$, quindi mai nell'intervallo $[0,1]$.

I valori che dobbiamo confrontare sono dunque solo quelli degli spigoli, ossia

$$f(P) = 4\,, \quad f(Q) = -8\,, \quad f(R) = 1\,.$$

Per cui su $\bar{\Omega}$, il minimo di f è -8, e il massimo è 4.

Esercizio 2. *Calcolare l'area dell'insieme*

$$\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq 1\,,\, y \leq \frac{1}{4}\sqrt{4 - x^2} \right\}.$$

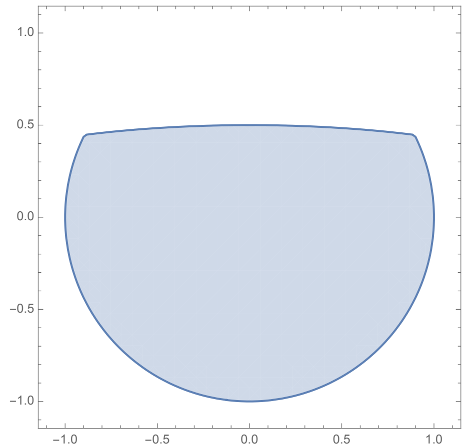

Figure 2: L'insieme Ω.

L'insieme Ω è rappresentato nella figura 2.

Il dominio suggerisce di risolvere l'esercizio usando il cambiamento di variabili in coordinate polari, ossia

$$\psi(\rho,\theta) = (x,y) \quad \text{con} \quad \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \quad \text{e} \quad |\det J_\psi(\rho,\theta)| = \rho\,.$$

Dunque ponendo S l'insieme tale che $\psi(S) = \Omega$, abbiamo

$$\text{Area}(\Omega) = \iint_\Omega 1 \; dx\, dy = \iint_S \rho \; d\rho\, d\theta\,.$$

Determiniamo adesso S e proviamo a scriverlo come insieme semplice. Dalla definizione di Ω troviamo

$$S = \left\{(\rho,\theta) \in [0,+\infty) \times [0,2\pi] \,:\, \rho^2 \le 1\,,\, \rho\sin\theta \le \frac{1}{4}\sqrt{4-\rho^2\cos^2\theta}\right\}$$

La prima condizione ci dice che $\rho \in [0,1]$, mentre la seconda condizione si riscrive come

$$\begin{cases} \sin\theta \ge 0 \\ \rho^2\sin^2\theta \le \frac{1}{16}\,(4-\rho^2\cos^2\theta) \end{cases} \qquad \bigcup \qquad \begin{cases} \sin\theta < 0 \\ \forall\,(\rho,\theta) \in [0,+\infty) \times [0,2\pi] \end{cases}$$

L'insieme S si ottiene quindi come unione degli insiemi di soluzioni dei due sistemi.

$$\begin{cases} \rho \in [0,1] \\ \sin\theta \ge 0 \\ \rho^2\sin^2\theta \le \frac{1}{16}\,(4-\rho^2\cos^2\theta) \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} \rho \in [0,1] \\ \sin\theta < 0 \\ \forall\,(\rho,\theta) \in [0,+\infty) \times [0,2\pi] \end{cases}$$

Analizziamo il primo sistema:

$$\begin{cases} \rho \in [0,1] \\ \sin\theta \ge 0 \\ \rho^2\sin^2\theta \le \frac{1}{16}\,(4-\rho^2\cos^2\theta) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \rho \in [0,1] \\ \theta \in [0,\pi] \\ \rho^2 \le \frac{4}{1+15\sin^2\theta} \end{cases}$$

Disegnando la funzione $\rho = \sqrt{\frac{4}{1+15\sin^2\theta}}$ per $\theta \in [0,\pi]$, otteniamo la figura 3 con θ sulle ascisse e ρ sulle ordinate. Dunque, dato $\bar\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ soluzione di $\sin^2\bar\theta = \frac{1}{5}$, il primo sistema ha come soluzione

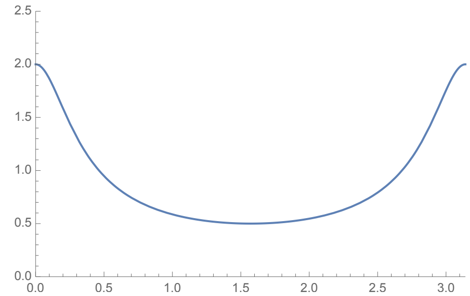

Figure 3:

l'insieme

$$\left\{0 \le \theta \le \bar\theta\,,\ 0 \le \rho \le 1\right\} \quad \bigcup \quad \left\{\bar\theta \le \theta \le \pi - \bar\theta\,,\ 0 \le \rho \le \sqrt{\frac{4}{1+15\sin^2\theta}}\right\} \quad \bigcup \quad \left\{\pi - \bar\theta \le \theta \le \pi\,,\ 0 \le \rho \le 1\right\}\,.$$

Analizziamo il secondo sistema:

$$\begin{cases} \rho \in [0,1] \\ \sin\theta < 0 \\ \forall\,(\rho,\theta) \in [0,+\infty) \times [0,2\pi] \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} \rho \in [0,1] \\ \theta \in (\pi, 2\pi) \\ \forall\,(\rho,\theta) \in [0,+\infty) \times [0,2\pi] \end{cases}$$

e quindi la sua soluzione è l'insieme

$$\{\pi < \theta < 2\pi\,,\ 0 \le \rho \le 1\}\,.$$

Possiamo quindi scrivere S come

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3\,,$$

dove

$$S_1 = \left\{0 \le \theta \le \bar\theta\,,\ 0 \le \rho \le 1\right\}$$

$$S_2 = \left\{\bar\theta \le \theta \le \pi - \bar\theta\,,\ 0 \le \rho \le \sqrt{\frac{4}{1+15\sin^2\theta}}\right\}$$

$$S_3 = \left\{\pi - \bar\theta \le \theta \le 2\pi\,,\ 0 \le \rho \le 1\right\}\,.$$

Dunque

$$\text{Area}(\Omega) = \iint_\Omega 1\ dx\,dy = \iint_S \rho\ d\rho\,d\theta = \iint_{S_1} \rho\ d\rho\,d\theta + \iint_{S_2} \rho\ d\rho\,d\theta + \iint_{S_3} \rho\ d\rho\,d\theta\,.$$

Per i singoli integrali si trova

$$\iint_{S_1} \rho\ d\rho\,d\theta = \int_0^{\bar\theta} \left(\int_0^1 \rho\ d\rho\right) d\theta = \int_0^{\bar\theta} \frac{1}{2}\ d\theta = \frac{1}{2}\,\bar\theta\,.$$

$$\iint_{S_2} \rho \, d\rho \, d\theta = \int_{\bar\theta}^{\pi-\bar\theta} \left(\int_0^{\sqrt{\frac{4}{1+15\sin^2\theta}}} \rho \, d\rho \right) d\theta = \int_{\bar\theta}^{\pi-\bar\theta} \frac{2}{1+15\sin^2\theta} \, d\theta =$$

$$= \int_{\bar\theta}^{\frac{\pi}{2}} \frac{4}{\cos^2\theta} \, \frac{1}{1+16\tan^2\theta} \, d\theta = \arctan(4\tan\theta)\Big|_{\bar\theta}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - \arctan(4\tan\bar\theta)\,.$$

$$\iint_{S_3} \rho \, d\rho \, d\theta = \int_{\pi-\bar\theta}^{2\pi} \left(\int_0^1 \rho \, d\rho \right) d\theta = \int_{\pi-\bar\theta}^{2\pi} \frac{1}{2} \, d\theta = \frac{1}{2}\,(\pi + \bar\theta)\,.$$

Usando la funzione $\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, possiamo scrivere

$$\bar\theta = \arcsin\frac{1}{\sqrt5} \qquad \text{e} \qquad \tan\bar\theta = \frac{1}{2}\,,$$

e quindi

$$\text{Area}(\Omega) = \pi + \arcsin\frac{1}{\sqrt5} - \arctan 2\,.$$

L'integrale si poteva svolgere anche senza il cambiamento in coordinate polari, e riducendo i calcoli con osservazioni sulla simmetria dell'insieme.

Esercizio 3. *Data la curva (γ, I), con $I = \left[\frac{\pi}{2}, 2\pi\right]$ e parametrizzazione*

$$\gamma : \left[\frac{\pi}{2}, 2\pi\right] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \gamma(t) = \Big(1 + t\cos t\,,\, t\sin t\Big)$$

i) scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente al sostegno della curva nel punto $P = (1-\pi\,,\,0)$;

La parametrizzazione $\gamma(t)$ è di classe C^1, quindi la retta tangente al sostegno della curva esiste in tutti i punti che corrispondono ai valori del parametro $t \in I$ per cui $\gamma'(t) \neq 0$. In particolare per $P = (1-\pi\,,\,0)$ troviamo innanzitutto $t_0 \in \left[\frac{\pi}{2}, 2\pi\right]$ tale che $\gamma(t_0) = P$, quindi risolviamo il sistema

$$\begin{cases} 1 + t_0\cos t_0 = 1 - \pi \\ t_0 \sin t_0 = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda troviamo $t_0 \in \{\pi, 2\pi\}$, e sostituendo nella prima si ricava che l'unica soluzione è $t_0 = \pi$. La retta tangente al sostegno nel punto P è quindi generata dal vettore velocità

$$\gamma'(t_0) = \begin{pmatrix} \cos t_0 - t_0 \sin t_0 \\ \sin t_0 + t_0\cos t_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -\pi \end{pmatrix}$$

e un vettore normale al sostegno nel punto P è quindi

$$\vec n = \begin{pmatrix} \pi \\ -1 \end{pmatrix}$$

L'equazione cartesiana cercata è allora

$$\pi\ (x - 1 + \pi) - y = 0\,.$$

ii) calcolare il lavoro lungo la curva (γ, I) del campo di vettori

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x-y}{x^2+y^2} \\ \frac{x+y}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

Studiamo innanzitutto le proprietà del campo $\mathbf{F}$. Il suo dominio è $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e

$$\mathrm{rot}(\mathbf{F})(x,y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) =$$

$$= \frac{x^2+y^2-2x(x+y)}{(x^2+y^2)^2} - \frac{-x^2-y^2-2y(x-y)}{(x^2+y^2)^2} = 0\,.$$

Quindi il campo $\mathbf{F}$ è irrotazionale. Essendo il suo dominio non semplicemente connesso, dobbiamo calcolare il lavoro per una curva chiusa che vada intorno al punto $(0,0)$.

Prima di chiederci se il campo è conservativo, studiamo le proprietà della curva (γ, I). La curva, che è un pezzo di spirale traslata, ha come sostegno l'insieme in figura 4.

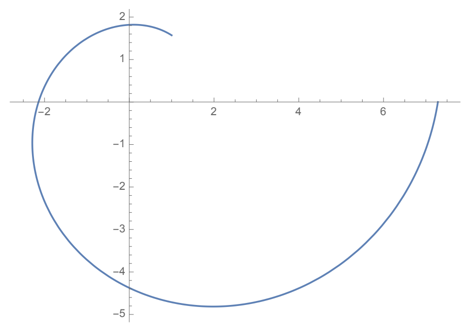

Figure 4: Il sostegno di (γ, I).

Possiamo quindi considerare la restrizione di $\mathbf{F}$ a un sottoinsieme $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ che sia semplicemente connesso, contenga il sostegno della curva ma non il punto $(0,0)$. Un insieme siffatto potrebbe essere $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \left\{x \geq 0\,,\, y = \frac{1}{100}x\right\}$.

Ristretto a questo insieme Ω, il campo risulta conservativo, e possiamo quindi calcolare il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo (γ, I) scegliendo una nuova curva $(\tilde{\gamma}, \tilde{I})$ con gli stessi punti iniziali e finali, e il cui sostegno sia contenuto in Ω. Scegliamo $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}_1 \cup \tilde{\gamma}_2$ dove $\tilde{\gamma}_1$ è la parametrizzazione di una circonferenza che ha come punto iniziale $\gamma\left(\frac{\pi}{2}\right)$ e termina sul semi-asse positivo delle ascisse, e $\tilde{\gamma}_2$ è la parametrizzazione del segmento sul semi-asse positivo delle ascisse dal punto finale di $\tilde{\gamma}_1$ a $\gamma(2\pi)$. Poniamo quindi

$$\tilde{\gamma}_1 : [\bar{t}, 2\pi] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \tilde{\gamma}_1(t) = \Big(R\cos t\,,\, R\sin t\Big)$$

con $R = \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{4}}$ e $\bar{t} = \arccos\frac{1}{R}$, e

$$\tilde{\gamma}_2 : [0,1] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \tilde{\gamma}_2(t) = \Big(R + t(1 + 2\pi - R)\,,\, 0\Big)\,.$$

In questo modo abbiamo

$$\tilde{\gamma}_1(\bar{t}) = \gamma\left(\frac{\pi}{2}\right)\,, \quad \tilde{\gamma}_1(2\pi) = \tilde{\gamma}_2(0) \quad \text{e} \quad \tilde{\gamma}_2(1) = \gamma(2\pi)\,.$$

Possiamo quindi scrivere

$$L(\mathbf{F},\gamma) = L(\mathbf{F},\tilde{\gamma}_1) + L(\mathbf{F},\tilde{\gamma}_2) =$$

$$= \int_{\bar{t}}^{2\pi} \left(\frac{R\cos t - R\sin t}{R^2}(-R\sin t) + \frac{R\cos t + R\sin t}{R^2}(R\cos t) \right) dt + \int_0^1 \frac{1}{R + t(1+2\pi - R)}(1+2\pi-R)\, dt =$$

$$= 2\pi - \bar{t} + \log\Big(R + t(1+2\pi-R)\Big)\Big|_0^1 = 2\pi - \arccos\frac{2}{\sqrt{4+\pi^2}} + \log(1+2\pi) - \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{\pi^2}{4}\right).$$

Analisi Matematica II
Corso di Ingegneria Gestionale
Compito del 23-07-2015 - B

- *È obbligatorio consegnare tutti i fogli, anche la brutta e il testo.*
- *Le risposte senza giustificazione sono considerate nulle.*

Esercizio 1. (10 punti) Data la funzione

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - xy - 6x + 3y + 9$$

i) trovare tutti i punti critici e, se possibile, caratterizzarli come punti di massimo locale, minimo locale o sella;

ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ sul triangolo di vertici

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2. (10 punti) Calcolare l'area dell'insieme

$$\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 + y^2 \leq 1 \, , \, x \leq \frac{1}{3}\sqrt{3 - y^2} \right\}.$$

Esercizio 3. (10 punti) Data la curva (γ, I), con $I = \left[\pi, \frac{5}{2}\pi\right]$ e parametrizzazione

$$\gamma : \left[\pi, \frac{5}{2}\pi\right] \to \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(t) = \Big(t\cos t \, , \, 1 + t \sin t\Big)$$

i) scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente al sostegno della curva nel punto $P = \left(0 \, , \, 1 - \frac{3\pi}{2}\right)$;

ii) calcolare il lavoro lungo la curva (γ, I) del campo di vettori

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x-y}{x^2+y^2} \\ \frac{x+y}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

Svolgimento

Esercizio 1. *Data la funzione*

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - xy - 6x + 3y + 9$$

i) trovare tutti i punti critici e, se possibile, caratterizzarli come punti di massimo locale, minimo locale o sella;

La funzione è un polinomio definito su tutto $\mathbb{R}^2$, dunque è anche di classe C^1 su tutto $\mathbb{R}^2$. Per trovare i punti critici dobbiamo dunque risolvere il sistema $\nabla f(x,y) = 0$, ossia

$$\begin{cases} 2x - y - 6 = 0 \\ 2y - x + 3 = 0 \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ricava $y = 2x - 6$, e sostituendo nella seconda otteniamo

$$3x - 9 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3\,.$$

Dunque f ha un solo punto critico, dato da

$$C = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Per caratterizzarlo andiamo a calcolare la matrice Hessiana di f. Osserviamo che essendo f un polinomio, è una funzione anche di classe C^2 su tutto il dominio, dunque la matrice Hessiana sarà simmetrica. In particolare troviamo

$$Hf(x,y) = Hf(3,0) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si ha $\det Hf(3,0) = 3 > 0$ e $\text{traccia}\, Hf(3,0) = 4 > 0$. Dunque P è un punto di minimo locale.

ii) determinare massimo e minimo di $f(x,y)$ sul triangolo di vertici

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Il triangolo, chiamiamolo $\bar{\Omega}$, è rappresentato nella figura 5.

Per studiare massimo e minimo assoluto di f su $\bar{\Omega}$ dobbiamo considerare i valori che la funzione assume sui punti critici liberi interni a $\bar{\Omega}$, sui punti critici vincolati al bordo di $\bar{\Omega}$, e sugli eventuali spigoli del bordo e punti di non derivabilità della funzione.

La funzione f non ha punti di non derivabilità, e il punto critico trovato al punto i) non è interno all'insieme $\bar{\Omega}$.

Ci rimane da studiare il comportamento di f sul bordo di $\bar{\Omega}$. Gli spigoli sono i punti

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

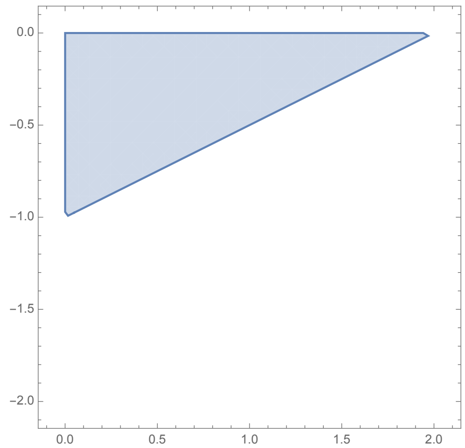

Figure 5: L'insieme $\bar{\Omega}$.

Parametrizziamo ora i tre segmenti del bordo. Troviamo

$$\gamma_1(t) = (1-t)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad t \in [0,1]$$

$$\gamma_2(t) = (1-t)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -t \end{pmatrix}, \qquad t \in [0,1]$$

$$\gamma_3(t) = (1-t)\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ t-1 \end{pmatrix}, \qquad t \in [0,1]$$

Componiamo con f e otteniamo le funzioni di una variabile

$$g_1(t) = f(\gamma_1(t)) = 4t^2 - 12t + 9\,, \qquad t \in [0,1]$$

$$g_2(t) = f(\gamma_2(t)) = t^2 - 3t + 9\,, \qquad t \in [0,1]$$

$$g_3(t) = f(\gamma_3(t)) = 3t^2 - 9t + 7\,, \qquad t \in [0,1]$$

Tutte le funzioni sono sempre derivabili e gli estremi dei loro domini corrispondono agli spigoli. Dunque ci rimane di trovare i punti critici delle tre funzioni.

Per g_1 si trova $g_1'(t) = 8t - 12$, che si annulla per $t = \frac{3}{2}$, quindi mai nell'intervallo $[0,1]$. Per g_2 si trova $g_2'(t) = 2t - 3$, che si annulla per $t = \frac{3}{2}$, quindi mai nell'intervallo $[0,1]$. Per g_3 si trova $g_3'(t) = 6t - 9$, che si annulla per $t = \frac{3}{2}$, quindi mai nell'intervallo $[0,1]$.

I valori che dobbiamo confrontare sono dunque solo quelli degli spigoli, ossia

$$f(P) = 9\,, \quad f(Q) = 1\,, \quad f(R) = 7\,.$$

Per cui su $\bar{\Omega}$, il minimo di f è 1, e il massimo è 9.

Esercizio 2. *Calcolare l'area dell'insieme*

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \le 1\,,\, x \le \frac{1}{3}\sqrt{3-y^2}\right\}\,.$$

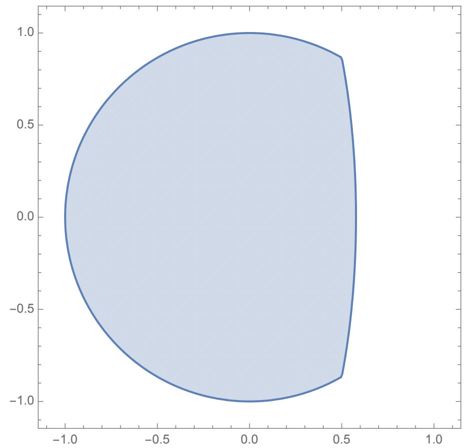

Figure 6: L'insieme Ω.

L'insieme Ω è rappresentato nella figura 6.

Il dominio suggerisce di risolvere l'esercizio usando il cambiamento di variabili in coordinate polari, ossia

$$\psi(\rho,\theta) = (x,y) \quad \text{con} \quad \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \quad \text{e} \quad |\det J_\psi(\rho,\theta)| = \rho\,.$$

Dunque ponendo S l'insieme tale che $\psi(S) = \Omega$, abbiamo

$$\text{Area}(\Omega) = \iint_\Omega 1\ dx\,dy = \iint_S \rho\ d\rho\,d\theta\,.$$

Determiniamo adesso S e proviamo a scriverlo come insieme semplice. Dalla definizione di Ω troviamo

$$S = \left\{(\rho,\theta) \in [0,+\infty) \times [-\pi,\pi] \,:\, \rho^2 \le 1\,,\, \rho\cos\theta \le \frac{1}{3}\sqrt{3-\rho^2\sin^2\theta}\right\}$$

La prima condizione ci dice che $\rho \in [0,1]$, mentre la seconda condizione si riscrive come

$$\begin{cases} \cos\theta \ge 0 \\ \rho^2\cos^2\theta \le \frac{1}{9}\left(3-\rho^2\sin^2\theta\right) \end{cases} \bigcup \begin{cases} \cos\theta < 0 \\ \forall\,(\rho,\theta) \in [0,+\infty) \times [-\pi,\pi] \end{cases}$$

L'insieme S si ottiene quindi come unione degli insiemi di soluzioni dei due sistemi.

$$\begin{cases} \rho \in [0,1] \\ \cos\theta \ge 0 \\ \rho^2\cos^2\theta \le \frac{1}{9}\left(3-\rho^2\sin^2\theta\right) \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \rho \in [0,1] \\ \cos\theta < 0 \\ \forall\,(\rho,\theta) \in [0,+\infty) \times [-\pi,\pi] \end{cases}$$

Analizziamo il primo sistema:

$$\begin{cases} \rho \in [0,1] \\ \cos\theta \ge 0 \\ \rho^2\cos^2\theta \le \frac{1}{9}\left(3-\rho^2\sin^2\theta\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho \in [0,1] \\ \theta \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \\ \rho^2 \le \frac{3}{1+8\cos^2\theta} \end{cases}$$

Disegnando la funzione $\rho = \sqrt{\frac{3}{1+8\cos^2\theta}}$ per $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, otteniamo la figura 7 con θ sulle ascisse e ρ sulle ordinate. Dunque, dato $\bar{\theta} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ soluzione di $\cos^2\bar{\theta} = \frac{1}{4}$, quindi $\bar{\theta} = \frac{\pi}{3}$ il primo sistema ha

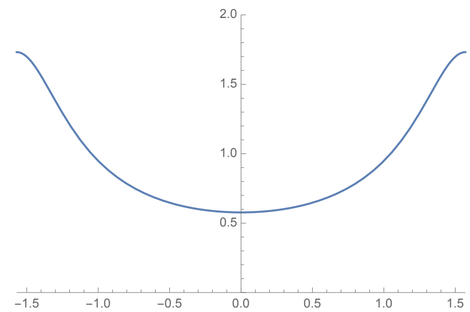

Figure 7:

come soluzione l'insieme

$$\left\{-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq -\frac{\pi}{3}\,,\, 0 \leq \rho \leq 1\right\} \quad \bigcup \quad \left\{-\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}\,,\, 0 \leq \rho \leq \sqrt{\frac{3}{1+8\cos^2\theta}}\right\} \quad \bigcup \quad \left\{\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\,,\, 0 \leq \rho \leq 1\right\}.$$

Analizziamo il secondo sistema:

$$\begin{cases} \rho \in [0,1] \\ \cos\theta < 0 \\ \forall\,(\rho,\theta) \in [0,+\infty) \times [-\pi,\pi] \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} \rho \in [0,1] \\ \theta \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \\ \forall\,(\rho,\theta) \in [0,+\infty) \times [-\pi,\pi] \end{cases}$$

e quindi la sua soluzione è l'insieme

$$\left\{-\pi < \theta < -\frac{\pi}{2}\,,\, 0 \leq \rho \leq 1\right\} \quad \bigcup \quad \left\{\frac{\pi}{2} < \theta < \pi\,,\, 0 \leq \rho \leq 1\right\}.$$

Possiamo quindi scrivere S come

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3\,,$$

dove

$$S_1 = \left\{-\pi \leq \theta \leq -\frac{\pi}{3}\,,\, 0 \leq \rho \leq 1\right\}$$

$$S_2 = \left\{-\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}\,,\, 0 \leq \rho \leq \sqrt{\frac{3}{1+8\cos^2\theta}}\right\}$$

$$S_3 = \left\{\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \pi\,,\, 0 \leq \rho \leq 1\right\}.$$

Dunque

$$\text{Area}(\Omega) = \iint_{\Omega} 1\; dx\,dy = \iint_{S} \rho\; d\rho\,d\theta = \iint_{S_1} \rho\; d\rho\,d\theta + \iint_{S_2} \rho\; d\rho\,d\theta + \iint_{S_3} \rho\; d\rho\,d\theta\,.$$

Per i singoli integrali si trova

$$\iint_{S_1} \rho\; d\rho\,d\theta = \int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{3}} \left(\int_0^1 \rho\; d\rho\right) d\theta = \int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2}\; d\theta = \frac{\pi}{3}\,.$$

$$\iint_{S_2} \rho \, d\rho \, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\int_0^{\sqrt{\frac{3}{1+8\cos^2\theta}}} \rho \, d\rho \right) d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{3}{1+8\cos^2\theta} \, d\theta =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{3\cos^2\theta} \, \frac{1}{1+\frac{1}{9}\tan^2\theta} \, d\theta = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{1}{3}\tan\theta\right)\Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6} \, .$$

$$\iint_{S_3} \rho \, d\rho \, d\theta = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \left(\int_0^1 \rho \, d\rho \right) d\theta = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \frac{1}{2} \, d\theta = \frac{\pi}{3} \, .$$

Quindi

$$\mathrm{Area}(\Omega) = \frac{5}{6}\pi \, .$$

L'integrale si poteva svolgere anche senza il cambiamento in coordinate polari, e riducendo i calcoli con osservazioni sulla simmetria dell'insieme.

Esercizio 3. *Data la curva (γ, I), con $I = \left[\pi, \, \frac{5}{2}\pi\right]$ e parametrizzazione*

$$\gamma : \left[\pi, \, \frac{5}{2}\pi\right] \to \mathbb{R}^2 \, , \qquad \gamma(t) = \Big(t\cos t \, , \, 1 + t\sin t\Big)$$

i) scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente al sostegno della curva nel punto $P = \left(0 \, , \, 1 - \frac{3\pi}{2}\right)$;

La parametrizzazione $\gamma(t)$ è di classe C^1, quindi la retta tangente al sostegno della curva esiste in tutti i punti che corrispondono ai valori del parametro $t \in I$ per cui $\gamma'(t) \neq 0$. In particolare per $P = \left(0 \, , \, 1 - \frac{3\pi}{2}\right)$ troviamo innanzitutto $t_0 \in \left[\pi, \, \frac{5}{2}\pi\right]$ tale che $\gamma(t_0) = P$, quindi risolviamo il sistema

$$\begin{cases} t_0 \cos t_0 = 0 \\ 1 + t_0 \sin t_0 = 1 - \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Dalla prima troviamo $t_0 \in \left\{\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi\right\}$, e sostituendo nella seconda si ricava che l'unica soluzione è $t_0 = \frac{3}{2}\pi$. La retta tangente al sostegno nel punto P è quindi generata dal vettore velocità

$$\gamma'(t_0) = \begin{pmatrix} \cos t_0 - t_0 \sin t_0 \\ \sin t_0 + t_0 \cos t_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}\pi \\ -1 \end{pmatrix}$$

e un vettore normale al sostegno nel punto P è quindi

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2}\pi \end{pmatrix}$$

L'equazione cartesiana cercata è allora

$$x + \frac{3}{2}\pi \left(y - 1 + \frac{3}{2}\pi\right) = 0 \, .$$

ii) calcolare il lavoro lungo la curva (γ, I) del campo di vettori

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x-y}{x^2+y^2} \\ \frac{x+y}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

Studiamo innanzitutto le proprietà del campo $\mathbf{F}$. Il suo dominio è $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e

$$\text{rot}(\mathbf{F})(x,y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) =$$

$$= \frac{x^2+y^2-2x(x+y)}{(x^2+y^2)^2} - \frac{-x^2-y^2-2y(x-y)}{(x^2+y^2)^2} = 0\,.$$

Quindi il campo $\mathbf{F}$ è irrotazionale. Essendo il suo dominio non semplicemente connesso, dobbiamo calcolare il lavoro per una curva chiusa che vada intorno al punto $(0,0)$.

Prima di chiederci se il campo è conservativo, studiamo le proprietà della curva (γ, I). La curva, che è un pezzo di spirale traslata, ha come sostegno l'insieme in figura 8.

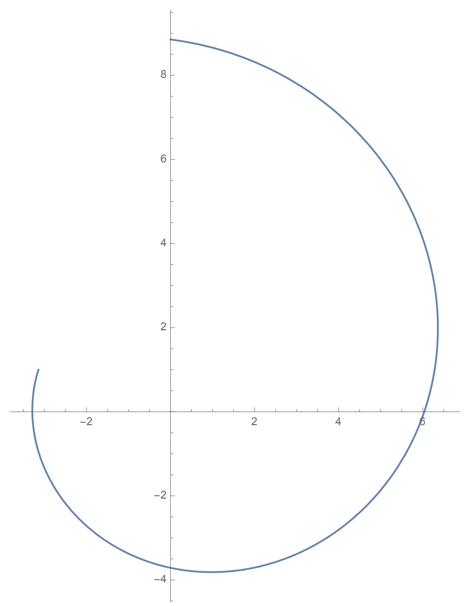

Figure 8: Il sostegno di (γ, I).

Possiamo quindi considerare la restrizione di $\mathbf{F}$ a un sottoinsieme $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ che sia semplicemente connesso, contenga il sostegno della curva ma non il punto $(0,0)$. Un insieme siffatto potrebbe essere $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{x \leq 0\,,\ y = -100x\}$.

Ristretto a questo insieme Ω, il campo risulta conservativo, e possiamo quindi calcolare il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo (γ, I) scegliendo una nuova curva $(\tilde{\gamma}, \tilde{I})$ con gli stessi punti iniziali e finali, e il cui sostegno sia contenuto in Ω. Scegliamo $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}_1 \cup \tilde{\gamma}_2$ dove $\tilde{\gamma}_1$ è la parametrizzazione di una circonferenza che ha come punto iniziale $\gamma(\pi)$ e termina sul semi-asse positivo delle ordinate, e $\tilde{\gamma}_2$ è la parametrizzazione del segmento sul semi-asse positivo delle ordinate dal punto finale di $\tilde{\gamma}_1$ a $\gamma\left(\frac{5}{2}\pi\right)$. Poniamo quindi

$$\tilde{\gamma}_1 : \left[\bar{t}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \tilde{\gamma}_1(t) = \Big(R\cos t\,,\ R\sin t\Big)$$

con $R = \sqrt{1+\pi^2}$ e $\bar{t} = -\pi - \arcsin \frac{1}{R}$ (infatti vogliamo $\bar{t} \in (-\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2})$, mentre $\arcsin : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$), e

$$\tilde{\gamma}_2 : [0,1] \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \tilde{\gamma}_2(t) = \Big(0\,,\; R + t(1 + \frac{5}{2}\pi - R)\Big)\,.$$

In questo modo abbiamo

$$\tilde{\gamma}_1(\bar{t}) = \gamma\left(\pi\right)\,, \quad \tilde{\gamma}_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = \tilde{\gamma}_2(0) \quad \text{e} \quad \tilde{\gamma}_2(1) = \left(\frac{5}{2}\pi\right)\,.$$

Possiamo quindi scrivere

$$L(\mathbf{F},\gamma) = L(\mathbf{F},\tilde{\gamma}_1) + L(\mathbf{F},\tilde{\gamma}_2) =$$

$$= \int_{\bar{t}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{R\cos t - R\sin t}{R^2}(-R\sin t) + \frac{R\cos t + R\sin t}{R^2}(R\cos t)\right)\, dt + \int_0^1 \frac{1}{R + t(1+\frac{5}{2}\pi - R)}(1+\frac{5}{2}\pi - R)\, dt =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \bar{t} + \log\Big(R + t(1+\frac{5}{2}\pi - R)\Big)\Big|_0^1 = \frac{3}{2}\pi + \arcsin\frac{1}{\sqrt{1+\pi^2}} + \log\left(1 + \frac{5}{2}\pi\right) - \frac{1}{2}\log\left(1+\pi^2\right)\,.$$