Sistemi Dinamici
Corso di Laurea in Matematica
Compito del 22-01-2026

Esercizio 1. (10 punti) Disegnare il ritratto di fase del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = x^2 - \mu\, x + (\mu - 1)\, y^2 \end{cases}$$

per $\mu = 1$ e per $\mu = 0$.

Esercizio 2. (10 punti) Si consideri il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \mu\, x \\ \dot{y} = -\mu\, y - x + (1 - \mu)\, x^2 \end{cases}$$

al variare di $\mu \in \mathbb{R}$.

(a) Mostrare che si tratta di un sistema hamiltoniano per ogni $\mu \in \mathbb{R}$.

(b) Per $\mu = 0$, disegnare il ritratto di fase e determinare $\bar{x}$ dato da

$$\bar{x} := \sup \{x \in \mathbb{R} \, : \, \mathcal{O}(x, 0) \text{ è periodica}\} ,$$

dove $\mathcal{O}(x, 0)$ indica l'orbita del punto $(x, 0) \in \mathbb{R}^2$. Se nella definizione di $\bar{x}$ si sostituisse sup con max, esisterebbe $\bar{x}$?

(c) Per $\mu = 1$, disegnare il ritratto di fase.

Esercizio 3. (10 punti) Si consideri la famiglia di funzioni continue $f_\lambda : [0, 1] \to [0, 1]$ definita da

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} 2\, x\, , & x \in J_1 = [0, \frac{1}{4}] \\ \lambda \left(x - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}\, , & x \in J_2 = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right) (1 - x)\ , & x \in J_3 = [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

al variare di $\lambda \in (0, 2]$.

(a) Costruire l'f_λ-grafo di $\mathcal{J} = \{J_1, J_2, J_3\}$ al variare di λ.

(b) Determinare esistenza e stabilità dei punti fissi al variare di λ. Per quali valori di λ ci sono punti periodici di periodo minimo 2 attrattivi?

(c) Dimostrare che esiste $\bar{\lambda} \in (0, 2]$ tale che per ogni $\lambda \in [\bar{\lambda}, 2]$, la mappa f_λ^2 ammette un ferro di cavallo. Scrivere un'equazione per determinare $\bar{\lambda}$.

ESERCIZIO 1

$$\begin{cases} \dot{x} = x+y \\ \dot{y} = x^2 - \mu x + (\mu-1)y^2 \end{cases}$$

$\boxed{\mu = 1}$ Troviamo i punti fissi del sistema, soluzioni di $\begin{cases} x+y=0 \\ x^2-x=0 \end{cases}$.

Dalla seconda equazione, si trova $x=0$ oppure $x=1$, quindi i punti fissi sono

$$P_1 = (0,0) \quad e \quad P_2 = (1,-1)$$

Per studiarne la stabilità, consideriamo $JF(x,y)$. Si ha

$$JF(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2x-1 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi:

- $JF(P_1) = JF(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, che verifica $\det JF(P_1) = 1>0$, $\operatorname{tr} JF(P_1) = 1>0$.

  Poiché $(\operatorname{tr} JF(P_1))^2 - 4\det JF(P_1) = -3<0$, si ha che P_1 è un punto fisso iperbolico di tipo fuoco instabile;

- $JF(P_2) = JF(1,-1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, che verifica $\det JF(P_2) = -1<0$, quindi P_2 è un punto fisso iperbolico di tipo sella. Gli autovalori di $JF(P_2)$ sono $\lambda_+ = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_- = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, e i rispettivi autovettori sono

$$v_+ = \begin{pmatrix} \lambda_+ \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_- = \begin{pmatrix} \lambda_- \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Studiamo l'esistenza di rette invarianti. Non ci sono rette invarianti parallele agli assi, perché $\dot{x}|_{x=c} \equiv 0$ o $\dot{y}|_{y=c} \equiv 0$ non si verifica per alcun $c\in\mathbb{R}$. Poniamo quindi $I(x,y) = ax+by$, con $a,b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, e verifichiamo se $\exists c\in\mathbb{R}$ tale che

$$\dot{I}\big|_{I=c} \equiv 0$$

Si ha

$$\dot{I}(x,y)\big|_{I=c} = a\dot{x} + b\dot{y}\big|_{ax+by=c} = a(x+y) + b(x^2-x)\big|_{y=\frac{c-ax}{b}} =$$

$= bx^2 + (a-b)x + \frac{c}{b}(c-ax)$.

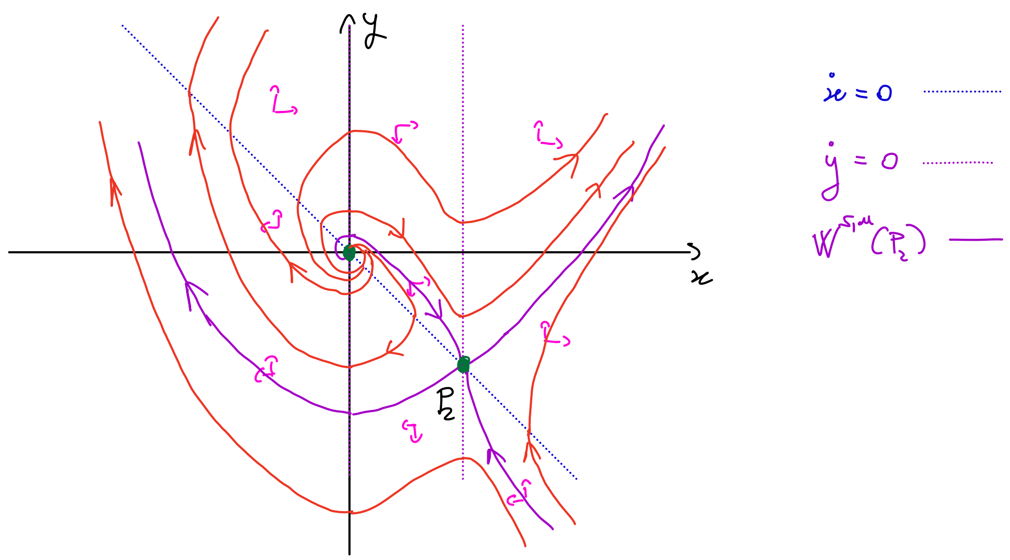
Quindi $\dot{I}\big|_{I=c} \neq 0$ se $b \neq 0$. Di conseguenza non esistono rette invarianti.

Per studiare l'esistenza di orbite periodiche, consideriamo la divergenza del campo. Si ha

$$(\operatorname{div} F)(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(x+y) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2-x) = 1$$

quindi per il Criterio di Bendixson-Dulac, non esistono orbite periodiche.

Utilizzando il segno del campo, disegniamo il ritratto di fase.



$\boxed{\mu = 0}$ In questo caso, i punti fissi del sistema sono le soluzioni di $\begin{cases} x+y=0 \\ x^2-y^2=0 \end{cases}$

Di conseguenza tutti i punti della retta $x+y=0$ sono fissi. Ne segue anche che non possono essere iperbolici, cosa che segue anche dal fatto che le matrici

$$JF(x,-x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2x & -2y \end{pmatrix}\Bigg|_{y=-x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2x & 2x \end{pmatrix}$$

hanno determinante nullo $\forall x \in \mathbb{R}$.

Cerchiamo rette invarianti. Come prima, non ne esistono parallele agli assi.

Sia $I(x,y) = ax+by$, con $a,b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Allora per $c \in \mathbb{R}$

$$\dot{I}(x,y)\big|_{I=c} = a\dot{x} + b\dot{y}\,\Big|_{ax+by=c} = a(x+y) + b(x^2-y^2)\Big|_{y=\frac{c-ax}{b}} =$$

$$= ax + \frac{c}{b}(c-ax) + bx^2 - \frac{1}{b}(c-ax)^2 = ax - \frac{a^2}{b}x + \frac{ac}{b} + bx^2 - \frac{c^2}{b} + \frac{2ac}{b}x - \frac{a^2}{b}x^2$$

$$= x^2\left(b - \frac{a^2}{b}\right) + x\left(a - \frac{a^2}{b} + \frac{2ac}{b}\right) + \frac{ac}{b} - \frac{c^2}{b}$$

Quindi $\dot{I}\big|_{I=c} \equiv 0 \iff \begin{cases} b^2 - a^2 = 0 \\ ab - a^2 + 2ac = 0 \\ ac - c^2 = 0 \end{cases}$. Dalla terza equazione $c = 0$ oppure $c = a$.

Se $c = 0$, nella seconda si trova $a(b-a) = 0$, quindi $b = a$, che soddisfa anche la prima.

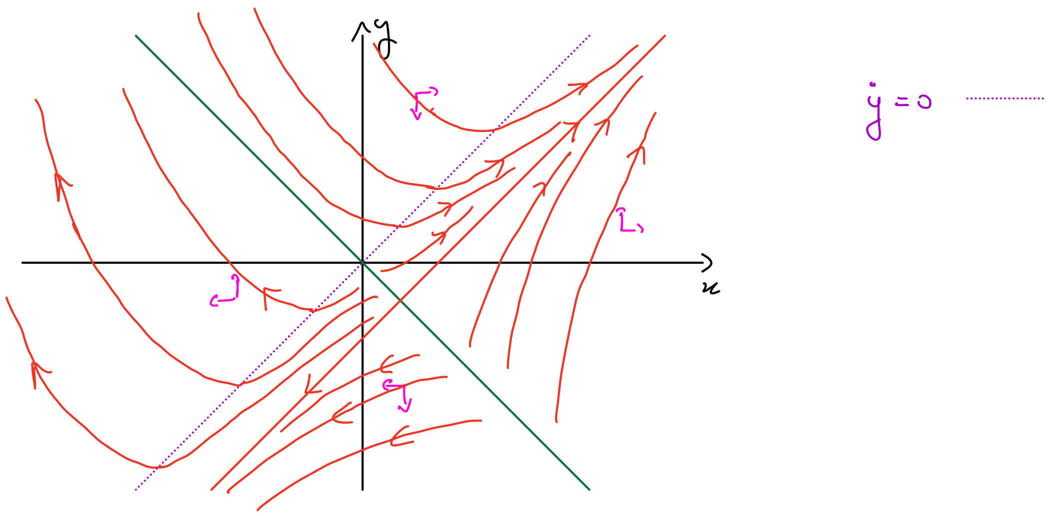
Ritroviamo quindi la retta di punti fissi $x + y = 0$.

Se $c = a$, nella seconda si trova $a(b+a) = 0$, quindi $b = -a$, che soddisfa anche la prima.

Troviamo quindi la retta $ax - ay = a$, ossia $y = x - 1$.

Per quanto riguarda le orbite periodiche, la teoria dell'indice di Poincaré ci garantisce che non ne possono esistere.

Utilizzando il segno del campo, disegniamo il ritratto di fase.



ESERCIZIO 2

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \mu x \\ \dot{y} = -\mu y - x + (1-\mu) x^2 \end{cases} \qquad , \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

(a) Dobbiamo trovare una funzione $H(x,y)$ di classe C^1 tale che

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial y}(x,y) \\ \dot{y} = -\dfrac{\partial H}{\partial x}(x,y) \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial y}(x,y) = y + \mu x \\ \dfrac{\partial H}{\partial x}(x,y) = \mu y + x + (\mu - 1) x^2 \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ricava $H(x,y) = \frac{1}{2} y^2 + \mu x y + c(x)$, dove $c(x)$ indica una funzione della sola variabile x. Sostituendo nella seconda equazione, si trova

$\mu y + c'(x) = \mu y + x + (\mu-1)x^2 \iff c'(x) = x + (\mu-1)x^2 \Rightarrow c(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{\mu-1}{3}x^3 + \text{cost.}$

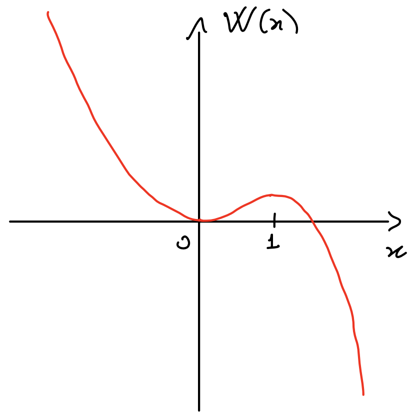
Possiamo quindi scegliere

$$\boxed{H(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + \mu xy + \frac{1}{2}x^2 + \frac{\mu-1}{3}x^3}$$

e il sistema risulta hamiltoniano rispetto ad H.

$\boxed{\text{(b)}}$ Per $\mu=0$, abbiamo $H(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$, che è hamiltoniana di tipo meccanico con $W(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$ e $W'(x) = x(1-x)$.

I punti fissi del sistema sono quindi $P_1 = (0,0)$ e $P_2 = (1,0)$.



Poiché $x=0$ è punto di minimo locale di W, e $x=1$ è punto di massimo locale, si ha che

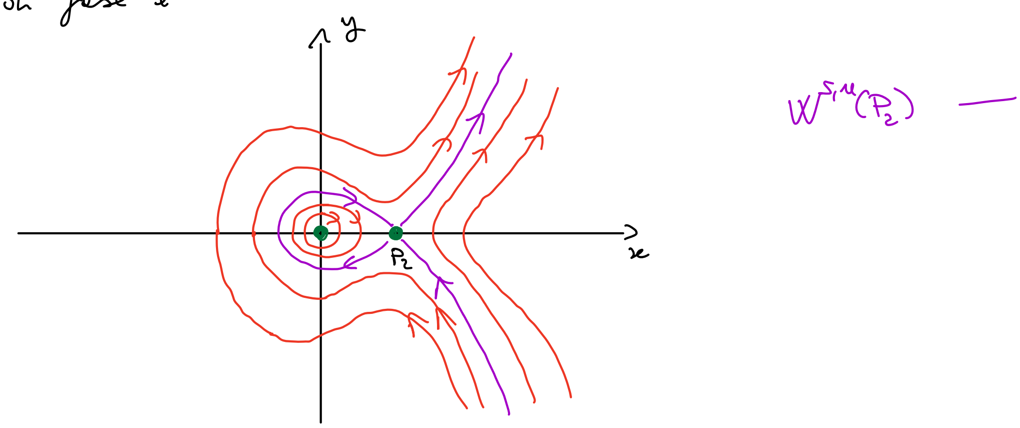
P_1 è un punto di tipo centro

P_2 è un punto di tipo sella.

Inoltre le $W^{s,u}(P_2)$ sono l'insieme di livello

$$H(x,y) = H(1,0) \iff \frac{1}{2}y^2 + W(x) = \frac{1}{6}$$

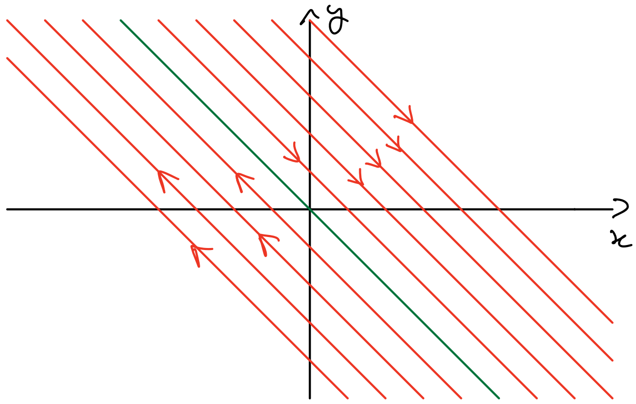
Dunque il ritratto di fase è



Le orbite periodiche si trovano solo intorno al centro P_1, e sono racchiuse dall'orbita omoclina a P_2. Quindi $\mathcal{O}(x,0)$ è periodica solo se $x \in (\bar{x}, 1) \setminus \{0\}$, dove $\bar{x}$ è la soluzione di $W(x) = \frac{1}{6}$ diversa da $x=1$. Quindi $\boxed{\bar{x} = 1}$. Inoltre $\bar{x}$ non è un massimo, perché $x=1$ corrisponde a P_2.

$\boxed{\text{(c)}}$ Per $\mu=1$, abbiamo $H(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + xy + \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}(y+x)^2$. Poiché gli insiemi di livello di H sono invarianti, otteniamo che le orbite sono tutte contenute nelle rette $y+x=c$, al variare di $c\in\mathbb{R}$. Inoltre, i punti fissi sono tutti e soli i punti della retta $y+x=0$.

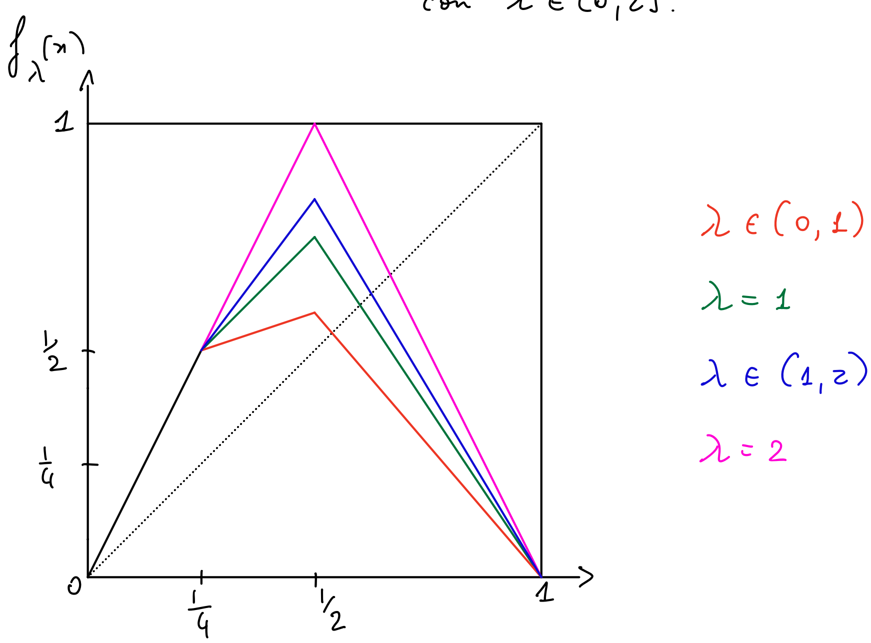
Il ritratto di fase è quindi



ESERCIZIO 3

$$f_\lambda(x)=\begin{cases} 2x, & x\in J_1=[0,\frac{1}{4}] \\ \lambda\left(x-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}, & x\in J_2=[\frac{1}{4},\frac{1}{2}] \\ \left(1+\frac{\lambda}{2}\right)(1-x), & x\in J_3=[\frac{1}{2},1] \end{cases}$$

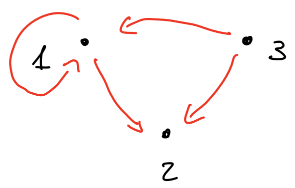
con $\lambda\in(0,2]$.



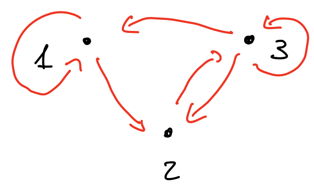
(a) Gli intervalli J_1 e J_3 ricoprono J_1 e J_2 $\forall\lambda\in(0,2)$, mentre J_2 non ricopre alcun intervallo se $\lambda\in(0,2)$.

Invece, per $\lambda=2$, J_1 ricopre J_1 e J_2, J_2 ricopre J_3, J_3 ricopre J_1, J_2 e J_3.

Quindi l'f_λ-grafo al variare di $\lambda\in(0,2]$ è



$\lambda \in (0,2)$



$\lambda = 2$

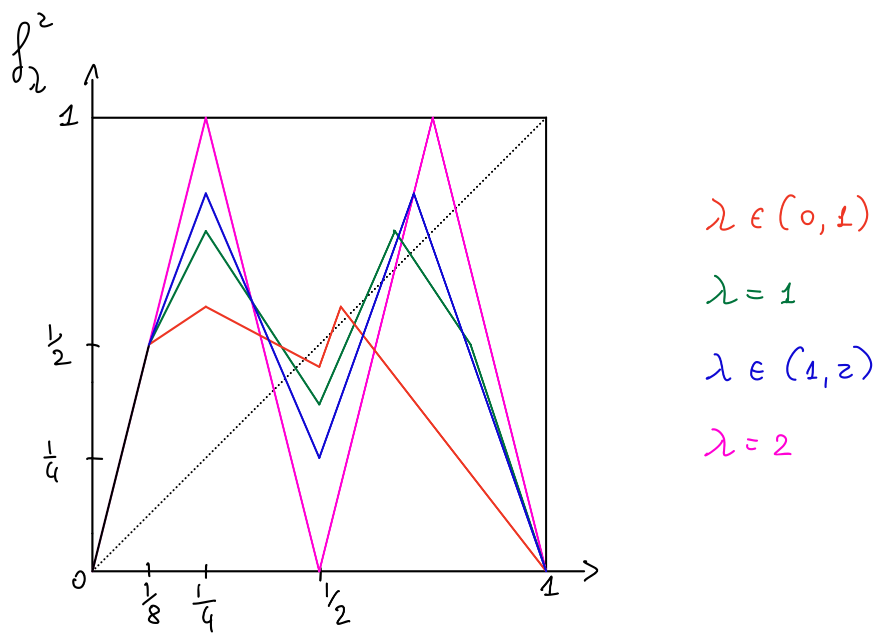
(b) Per ogni $\lambda \in (0,2]$, la mappa f_λ ha due punti fissi:

- $x_1 = 0$, per cui $|f_\lambda'(x_1)| = 2 > 1$, quindi è repulsivo $\forall \lambda \in (0,2]$
- $x_2 = \dfrac{2+\lambda}{4+\lambda}$, per cui $|f_\lambda'(x_2)| = 1 + \frac{\lambda}{2} > 1$, quindi è repulsivo $\forall \lambda \in (0,2]$

Per studiare i punti periodici di periodo minimo 2, consideriamo $f_\lambda^2(\frac{1}{2})$. Si ha $f_\lambda(\frac{1}{2}) = \frac{\lambda}{4} + \frac{1}{2} \in J_3$ $\forall \lambda \in (0,2]$, quindi

$$f_\lambda^2\left(\tfrac{1}{2}\right) = f_\lambda\left(\tfrac{\lambda}{4} + \tfrac{1}{2}\right) = \left(1 + \tfrac{\lambda}{2}\right)\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{\lambda}{4}\right) = \frac{(2+\lambda)(2-\lambda)}{8} = \frac{4-\lambda^2}{8} = \frac{1}{2} - \frac{\lambda^2}{8}$$

Osserviamo che $f_\lambda^2(\frac{1}{2}) < \frac{1}{2}$ $\forall \lambda \in (0,2]$, quindi il grafico di f_λ^2 è



Ne segue che per ogni $\lambda \in (0,2]$, esiste una coppia di punti periodici di periodo minimo 2, che formano una orbita periodica. Indicandoli con y_1, y_2, si ha $y_1 \in J_2$, $y_2 \in J_3$.
Quindi $|(f_\lambda^2)'(y_1)| = |(f_\lambda^2)'(y_2)| = \lambda\left(1 + \frac{\lambda}{2}\right)$.

La condizione perché siano attrattivi è quindi $\lambda\left(1+\frac{\lambda}{2}\right) < 1 \iff \lambda \in (0, \sqrt{3}-1)$.

Osserviamo che, per $\lambda = \sqrt{3}-1$, si ha $(f_\lambda^2)'(y_1) = (f_\lambda^2)'(y_2) = -2$. Poiché la mappa f_λ^2 è lineare a tratti, i punti non sono attrattivi.

$\boxed{(c)}$ Troviamo $\bar{\lambda}$ costruendo un ferro di cavallo per f_λ^2 usando l'intervallo

$$J = [z_2, x_2]$$

dove $x_2 = \frac{2+\lambda}{4+\lambda}$ è il punto fisso di f_λ, e $z_2 = \frac{6+\lambda}{4(4+\lambda)} \in J_2$ e verifica $f_\lambda(z_2) = x_2$. Si ha $f_\lambda^2(z_2) = f_\lambda^2(x_2) = x_2$. Poiché $\frac{1}{2} \in J$, se $f_\lambda^2(\frac{1}{2}) \leq z_2$, J è un ferro di cavallo per f_λ^2. Si ha

$$f_\lambda^2\left(\tfrac{1}{2}\right) < z_2 \iff \frac{4-\lambda^2}{8} < \frac{6+\lambda}{4(4+\lambda)} \iff p(\lambda) := \lambda^3 + 4\lambda^2 - 2\lambda - 4 \geq 0.$$

Valgono le seguenti condizioni: $p(0) = -4$, $p(2) = 16$, $p'(\lambda) = 3\lambda^2 + 8\lambda - 2$, e $p'(\lambda) \geq 0 \iff \lambda \in \left(-\infty, \frac{-4-\sqrt{22}}{3}\right] \cup \left[\frac{-4+\sqrt{22}}{3}, +\infty\right)$. Quindi $\exists\, \bar{\lambda} \in \left(\frac{-4+\sqrt{22}}{3}, 2\right)$ tale che

$$\underline{p(\bar{\lambda}) = 0 \quad \text{e} \quad p(\lambda) \geq 0 \quad \forall \lambda \in [\bar{\lambda}, 2].}$$

Questo garantisce che $\bar{\lambda}$ soddisfi la condizione richiesta.