Esercizi

Valore atteso e momenti

1. Sia X variabile aleatoria con densità
$$f(x) = \begin{cases} \lambda\, x^2\,, & 0 \le x \le 3 \\ 0\,, & \text{altrimenti} \end{cases}$$
(i) Determinare λ; (ii) calcolare il valore atteso di X; (iii) calcolare la varianza di X.
Risposte: (i) $\lambda = \frac{1}{9}$*; (ii)* $E[X] = \frac{9}{4}$*; (iii)* $Var(X) = \frac{27}{80}$.

2. Sia X variabile aleatoria uniforme sull'intervallo $[-2, 2]$ e sia $Y = (X + 1)^2$. Disegnare la funzione di ripartizione di Y e calcolare: (i) valore atteso di Y; (ii) varianza di Y.
Risposte: (i) $E[Y] = \frac{7}{3}$*; (ii)* $Var(Y) = \frac{304}{45}$.

3. Si lanci 5 volte una moneta le cui facce hanno probabilità data da $p(T) = \frac{1}{3}$ e $p(C) = \frac{2}{3}$, e si consideri la variabile aleatoria X definita in questo modo: partendo da 0 sulla retta reale, mi muovo di $+1$ se in un lancio esce testa, sto fermo se in un lancio esce croce. (i) Determinare il valore atteso e la varianza di X. (ii) Determinare il valore atteso e la varianza se mi muovo di $+2$ se esce testa, e di $+1$ se esce croce. (iii) Determinare il valore atteso e la varianza se mi muovo di $+4$ se esce testa, e di $+2$ se esce croce.
Risposte: (i) valore atteso $= \frac{5}{3}$*, varianza* $= \frac{10}{9}$*; (ii) valore atteso* $= \frac{20}{3}$*, varianza* $= \frac{10}{9}$*; (iii) valore atteso* $= \frac{40}{3}$*, varianza* $= \frac{40}{9}$.

4. Si lanci ripetutamente una moneta con le facce equiprobabili finché non esce T, e si punti 1 euro sull'uscita di T a ogni lancio. Sapendo che se esce T vinciamo 1 euro e se non esce perdiamo quanto puntato, costruire la variabile aleatoria X che associa al numero di lanci che dobbiamo effettuare la vincita o la perdita totale (nella vincita o perdita totale si consideri anche l'euro puntato come valore in uscita). Calcolarne il valore atteso usando la formula $\sum_{k=1}^{+\infty} k2^{-k} = 2$.
Risposta: $E[X] = -1$.

5. Si lancino 5 monete con le facce equiprobabili, e per ogni moneta se esce T la si rilanci una sola altra volta (ogni moneta viene lanciata al massimo due volte). Determinare il valore atteso e varianza del numero di T risultanti alla fine dell'esperimento. Infine usare la disuguaglianza di Markov per dire se è più probabile che il numero di T sia maggiore o minore di 2.5.
Risposte: valore atteso $= \frac{5}{4}$*; varianza* $= \frac{15}{16}$*. È più probabile che il numero di* T *sia minore di* 2.5.

6. Siano X variabile aleatoria binomiale di tipo $B(2, \frac{1}{9})$ e Y variabile aleatoria gaussiana di tipo $N(0, 9)$. Sapendo che X e Y sono indipendenti, calcolare il valore atteso di $Z_1 = (X+1)Y^2$ e di $Z_2 = X^2(Y+1)^2$.
Risposte: $E[Z_1] = 11$*;* $E[Z_2] = \frac{200}{81}$.

7. Siano X variabile aleatoria binomiale di tipo $B(2, \frac{1}{5})$ e Y variabile aleatoria uniforme sull'intervallo $[0, 2]$. Sapendo che X e Y sono indipendenti, calcolare il valore atteso di $Z = \frac{X\,(Y-1)^2}{X+1}$.
Risposta: $\frac{14}{225}$.

8. Siano X_1 e X_2 variabili aleatorie indipendenti ed equidistribuite di tipo Poisson con parametro $\lambda > 0$. (i) Determinare λ in modo che valga $E[(X_1 - X_2)^2] = 1$. (ii) Utilizzando il valore di λ trovato, calcolare $P[X_1 + X_2 \ge 2]$. (iii) Utilizzando il valore di λ trovato, calcolare $E[g(X_1)]$ dove
$$g(t) = \begin{cases} t\,, & t \le 2 \\ 2\,, & t > 2 \end{cases}$$
Risposte: (i) $\lambda = \frac{1}{2}$*; (ii)* $1 - \frac{2}{e}$*; (iii)* $2 - \frac{5}{2}\, e^{-\frac{1}{2}}$.