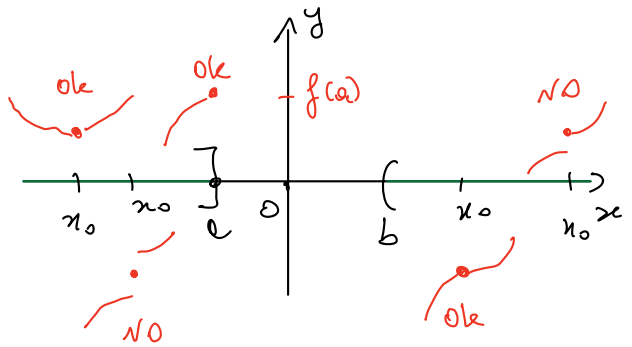
Continuità

$f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Def Sia $x_0 \in D$, si dice che f è *continua in x_0* se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

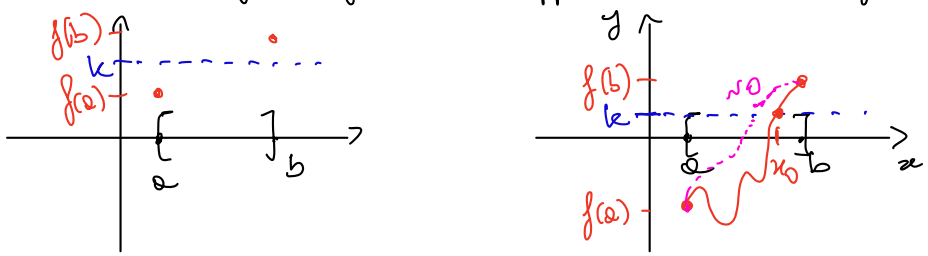
Def Dato $A \subseteq D$ dominio naturale, si dice che f è *continua in A* se f è continua in x_0, $\forall x_0 \in A$.



$D = (-\infty, a] \cup (b, +\infty)$

Teorema

- (Permanenza del segno) Sia $x_0 \in D$ e f sia continua in x_0. Se $f(x_0) > 0$ (oppure $f(x_0) < 0$) allora $\exists\, \varepsilon > 0$ tale che $\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap D$ si ha $f(x) > 0$ (oppure $f(x) < 0$).
- (Esistenza degli zeri e dei valori intermedi). Sia $[a,b] \subseteq D$ e supponiamo che f sia continua in $[a,b]$.
  - Se $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ (oppure $f(a) > 0$, $f(b) < 0$) allora $\exists\, x_0 \in (a,b)$ tale che $f(x_0) = 0$.
  - Sia $k \in (f(a), f(b))$ (oppure $k \in (f(b), f(a))$)



allora $\exists\, x_0 \in (a,b)$ tale che $f(x_0) = k$.

- (Weierstrass) Sia $[a,b] \in D$ e f continua in $[a,b]$. Allora esistono $\max_{[a,b]} f$ e $\min_{[a,b]} f$.

Proposizione

- Le funzioni elementari sono continue in tutto il loro dominio naturale.
- Se $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$, f e g continue in x_0, allora sono continue in x_0 anche
$$f+g,\ f-g,\ f\cdot g,\ \frac{f}{g}\ (g(x_0)\neq 0).$$
- Se g è continua in y_0, f è continua in x_0, $f(x_0)=y_0$, allora $g\circ f$ è continua in x_0.

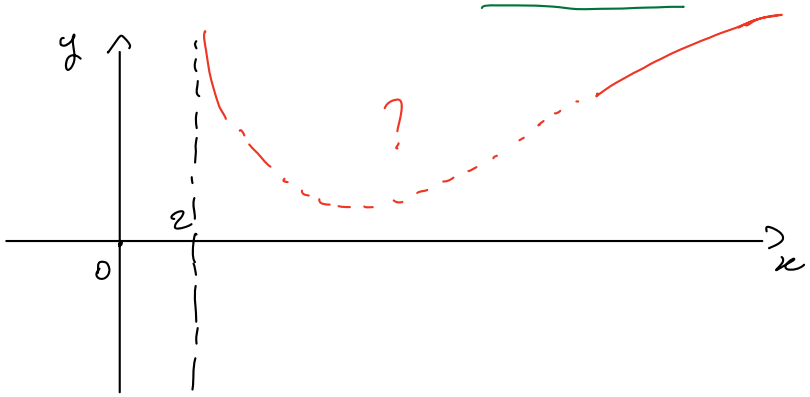
OSS $f(x)=|x|$ è continua in $D=\mathbb{R}$.

ES $f(x)=\log\left(\frac{x^2}{x-2}\right)$ è continua in $D=?$

$$D=\left\{x\in\mathbb{R} : \frac{x^2}{x-2}>0,\ x-2\neq 0\right\} = (2,+\infty).$$

$$\frac{x^2}{x-2}>0 \iff \begin{cases} x^2>0 \\ x-2>0 \end{cases} \text{ opp. } \begin{cases} x^2<0 \\ x-2<0 \end{cases} \iff \begin{cases} x\neq 0 \\ x>2 \end{cases} \iff x\in(2,+\infty)$$

$$x-2\neq 0 \iff x\neq 2 \iff x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$$



- $\lim_{x\to+\infty} \log\left(\frac{x^2}{x-2}\right) = \text{“}\log(+\infty)\text{”} = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x-2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{x}} = +\infty\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{+\infty}} = +\infty\cdot\frac{1}{1-0} =$$

$$= +\infty\cdot 1 = +\infty$$

Asintoto obliquo? NO

$$a = \lim_{x\to+\infty}\frac{\log\left(\frac{x^2}{x-2}\right)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\log\left(\frac{x^2}{x-2}\right)}{x}\cdot\frac{\frac{x^2}{x-2}}{\frac{x^2}{x-2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{\log\left(\frac{x^2}{x-2}\right)}{\frac{x^2}{x-2}}}_{\to 0 \text{ per } x\to+\infty} \cdot \underbrace{\frac{\frac{x^2}{x-2}}{x}}_{= \frac{x^2}{x^2-2x} \to 1 \text{ per } x\to+\infty} = 0 \cdot 1 = 0$$

- $\lim_{x\to 2^+} \log\left(\frac{x^2}{x-2}\right) = \log(+\infty) = +\infty$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2}{x-2} = \frac{4}{0^+} = 4 \cdot \frac{1}{0^+} = 4 \cdot (+\infty) = +\infty$$

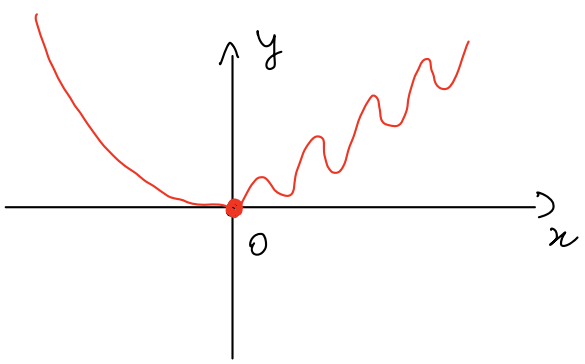
- $\exists\, x_0 \in (2,+\infty)$ tale che $\log\left(\frac{x_0^2}{x_0-2}\right) = 0$? NO

$$\log\left(\frac{x^2}{x-2}\right) = 0 \iff \begin{cases} \frac{x^2}{x-2} = 1 \\ x > 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = x-2 \\ x>2 \end{cases} \quad \not\exists$$

$$x^2 - x + 2 = 0 \iff x_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{1-8}}{2} \quad \not\exists$$

$\longleftrightarrow$

ES $$f(x) = \begin{cases} x^2 + \sin x, & x \in [0,+\infty) \\ -x^3 & x \in (-\infty, 0) \end{cases}, \quad D = [0,+\infty) \cup (-\infty,0) = \mathbb{R}$$



$$f(0) = x^2 + \sin x \Big|_{x=0} = 0^2 + \sin(0) = 0$$

Sicuramente f è continua in $(-\infty,0) \cup (0,+\infty) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

f è continua anche in 0? SÌ

$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$? SÌ

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x^2 + \sin x) = 0$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (-x^3) = -0^3 = 0$

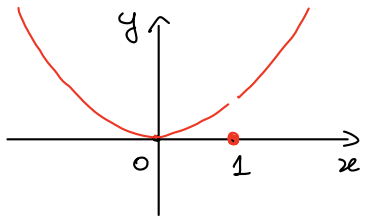
f è continua in $\mathbb{R}$.

f è continua in $x_0 \iff \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Def Sia $x_0 \in D$. Se f non è continua in x_0, si dice che:

- f ha una discontinuità eliminabile in x_0 se esiste $\lim_{x \to x_0} f(x)$ ma è diverso da $f(x_0)$

Es



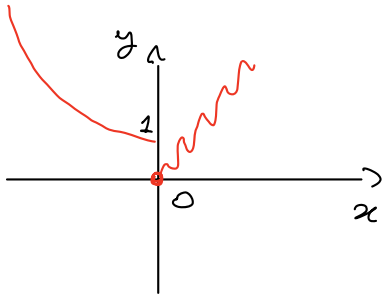
$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 1 \neq 0 = f(1)$$

- f ha una discontinuità di I specie in x_0 se

$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell^+ \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell^- \in \mathbb{R}$, ma $\ell^+ \neq \ell^-$.

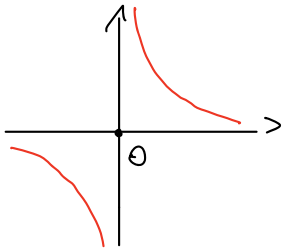
Es $f(x) = \begin{cases} x^2 + \sin x, & x \in [0, +\infty) \\ -x^3 + 1, & x \in (-\infty, 0) \end{cases}$



$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = 1$$

- f ha una discontinuità di II specie in x_0 in tutti gli altri casi.

Oss $f(x) = \frac{1}{x}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, f è continua in D

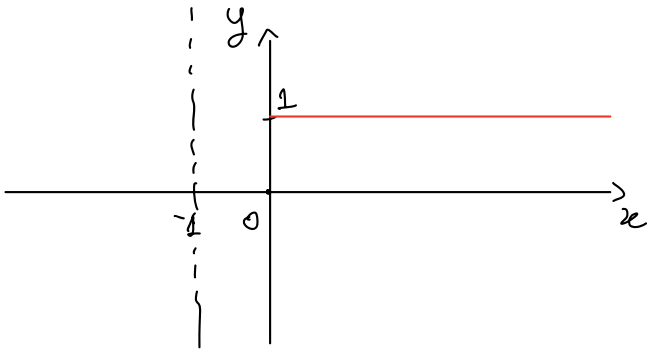


ES $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, +\infty) \\ e^{\frac{x - \sin x}{x+1}}, & x \in (-\infty, 0] \end{cases}$

$D = (0, +\infty) \cup \{ x \in (-\infty, 0] : x + 1 \neq 0 \}$

$x + 1 \neq 0 \iff x \neq -1$

$D = \mathbb{R} \setminus \{-1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$



$\lim_{x \to -1^{\pm}} f(x) = ?$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = ?$

Certamente f è continua in $(-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, +\infty)$

f è continua in 0? SÌ

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} e^{\frac{x \sin x}{x+1}} = e^0 = 1$

$\lim_{x \to 0^-} \frac{x \sin x}{x+1} = \frac{0 \cdot \sin(0)}{0+1} = \frac{0}{1} = 0$

Quindi $\lim_{x \to 0} f(x) = 1 \overset{?}{=} f(0) = 1$.