Limiti

Def (Limiti laterali) Sia $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, x_0 punto di accumulazione per D, $x_0 \in \mathbb{R}$ (non è necessario che $x_0 \in D$).

Si dice che f tende a $l \in \overline{\mathbb{R}}$ per x che tende a x_0 da destra, $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$, se

$\forall$ V intorno di l, $\exists \delta > 0$ tale che se $x \in (x_0, x_0 + \delta) \cap D$ allora $f(x) \in V$.

Si dice che f tende a $l \in \overline{\mathbb{R}}$ per x che tende a x_0 da sinistra, $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$, se

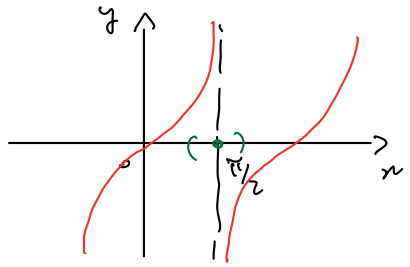
$\forall$ V intorno di l, $\exists \delta > 0$ tale che se $x \in (x_0 - \delta, x_0) \cap D$ allora $f(x) \in V$.

Teorema

- Se il $\lim_{x \to x_0} f(x)$ esiste allora è unico.
- Supponiamo che x_0 sia di accumulazione per D e $\forall \delta > 0$ $(x_0, x_0 + \delta) \cap D \neq \emptyset$ e $(x_0 - \delta, x_0) \cap D \neq \emptyset$.

  Allora il $\lim_{x \to x_0} f(x)$ esiste se e solo se esistono il limite destro, $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$, e il limite sinistro, $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$, e sono uguali.

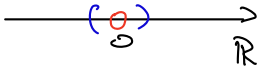
Oss

- 

  $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan x$ non esiste

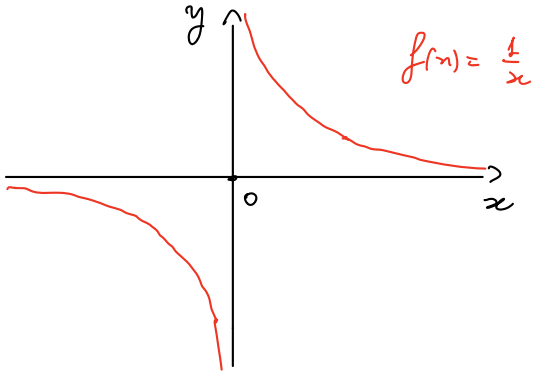
  $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$, $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$

- $f(x) = \frac{1}{x}$, $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

  punti di accumulazione $\quad Acc(D) = \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

$x_0 \in D$, $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{x} = \frac{1}{x_0}$



$x_0 = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$

$x_0 = -\infty$, $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{-\infty} = -\frac{1}{+\infty} = 0^-$

$x_0 = 0$, $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = "\frac{1}{0}"$ non è definita.

$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \iff \forall M \gg 1 \ \exists \delta > 0$ tale che se $x \in (0, \delta) \cap D$ ($0 < x < \delta$) allora $\frac{1}{x} > M$

$= \frac{1}{0^+} = +\infty$

$\frac{1}{x} > M \underset{x>0}{\iff} x < \frac{1}{M} = \delta$

$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\frac{1}{0^+} = -\infty$

$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} \neq \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x}$ quindi $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ non esiste.

Teorema

- $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : D_g \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, x_0 di accumulazione per D_f e D_g se esistono $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_f \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = l_g \in \overline{\mathbb{R}}$, allora:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = l_f + l_g \quad , \quad \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = l_f \cdot l_g$$

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - g(x)) = l_f - l_g \quad , \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_f}{l_g}$$

a condizione che siano forme non indeterminate (che sono diverse da $+\infty - \infty$, $\frac{0}{0}$, $0 \cdot (\pm\infty)$, $\frac{1}{0}$, $\frac{+\infty}{+\infty}$, $\frac{+\infty}{-\infty}$).

- Siano $g : D_g \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h : D_h \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tali che $g(D_g) \subseteq D_h$:

$$D_g \xrightarrow{g} D_h \cap \mathbb{R} \xrightarrow{h} \mathbb{R}$$

quindi che sia ben definita $f := h \circ g$. Sia $x_0 \in \mathrm{Acc}(D_g)$ e supponiamo che esista $\lim_{x \to x_0} g(x) = l_g$. Se $l_g \in \mathrm{Acc}(D_h)$ ed esiste $\lim_{y \to l_g} h(y) = l_h$, allora $\lim_{x \to x_0} \underbrace{f(x)}_{(h \circ g)(x)} = l_h$.

ES $f(x) = e^x + e^{-x}$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (e^x + e^{-x}) = +\infty + 0 = +\infty$.

$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$

$h(y) = e^y$, $g(x) = -x$, $D_h = \mathbb{R}$, $D_g = \mathbb{R}$

$(h\circ g)(x) = h(g(x)) = e^{g(x)} = e^{-x}$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} (-x) = -\infty = l_g$

$\lim_{y\to l_g} h(y) = \lim_{y\to-\infty} e^y = 0$

$\Big\} \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$

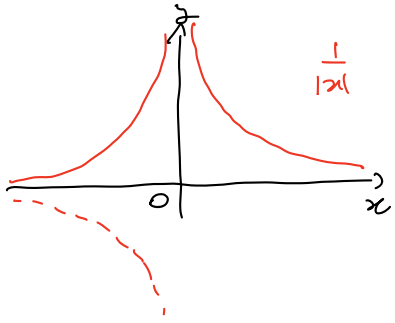
$\left[\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0^+\right]$

ES $f(x) = \frac{1}{|x|}$, $D = \mathbb{R}\setminus\{0\} = \{x\in\mathbb{R} : |x|\neq 0\} = \{x\in\mathbb{R} : x\neq 0\}$.

$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{|x|} = \frac{1}{|0|} = \frac{1}{0}$ non è definito

$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{|x|} = \frac{1}{|0^+|} = \frac{1}{0^+} = +\infty$, $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{|x|} = \frac{1}{|0^-|} = \frac{1}{-0^-} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

$\lim_{x\to 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$



ES $\lim_{x\to+\infty} \sin\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$ "$=$" $\sin\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2+1}\right) = \sin(0^+) = 0$

$h(y) = \sin y$, $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2+1} = \frac{+\infty}{+\infty+1} = \frac{+\infty}{+\infty}$ indeterminata

$\frac{x}{x^2+1} = \frac{x}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{x}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{+\infty}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{+\infty}} =$$

$$= 0^+ \cdot \frac{1}{1+0^+} = 0^+ \cdot 1 = 0^+$$

Limiti notevoli

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad , \quad \lim_{x\to0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad , \quad \lim_{x\to0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^m} = +\infty \quad \forall\, m>0 \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^m}{\log x} = +\infty \quad , \quad \forall\, m>0$$

ES $$\lim_{x\to0} \frac{x^3\cdot\cos x + x^2}{x^2\cdot\sin x + x} = \frac{0\cdot\cos 0 + 0}{0\cdot\sin 0 + 0} = \frac{0\cdot1+0}{0\cdot0+0} = \frac{0}{0}$$ indet.

$$\frac{x^3\cdot\cos x + x^2}{x^2\cdot\sin x + x} = \frac{x^2(x\cdot\cos x + 1)}{x(x\cdot\sin x + 1)} = \frac{x^2}{x}\cdot\frac{x\cos x+1}{x\sin x+1}$$

$$= \lim_{x\to0} x\cdot\frac{x\cdot\cos x+1}{x\cdot\sin x+1} = 0\cdot\frac{0\cdot\cos 0+1}{0\cdot\sin 0+1} = 0\cdot\frac{0+1}{0+1} = 0\cdot1 = 0$$