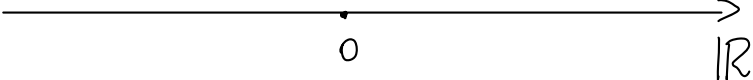


Analisi Matematica

$\mathbb{R}$ numeri reali 

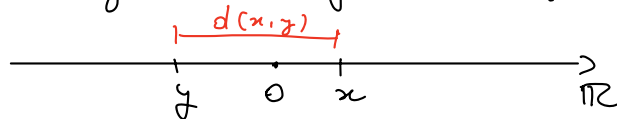
• $\mathbb{R}$ ha un ordinamento totale. Ossia

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \text{ vale } x < y \text{ oppure } x > y \text{ oppure } x = y.$$

oss " $\leq$ " = minore o uguale, " $\geq$ " = maggiore o uguale
 $3 \leq 3 \checkmark$.

• $\mathbb{R}$ ha distanza euclidea. $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+ := [0, +\infty)$

$$d(x, y) := |x - y| = \max \{ x - y, y - x \}$$



$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

oss $d(x, y) = d(y, x)$

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \text{disq. triangolare}$$

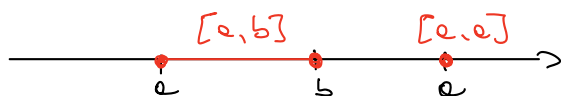
Topologia di $\mathbb{R}$.

Intervallo. Dati $a, b \in \mathbb{R}$, si chiama

intervallo chiuso tra a e b con $a \leq b$, l'insieme

$$[a, b] := \{ x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b \}$$

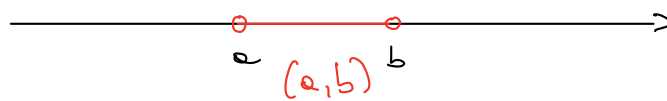
$$a \in [a, b], b \in [a, b] \quad \text{oss } [a, a] = \{a\}$$



intervallo aperto tra a e b con $a < b$, l'insieme

$$(a, b) := \{ x \in \mathbb{R} : a < x < b \}$$

$$a \notin (a, b), b \notin (a, b) \quad \text{oss } (a, a) = \emptyset$$



$$a, b \in \mathbb{R}, a < b, \quad [a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}, \quad a \in [a, b) \\ b \notin [a, b)$$

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}, \quad a \notin (a, b] \\ b \in (a, b]$$

a e b si chiamano estremi



$$+\infty \text{ verifica che } a < +\infty \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$$-\infty \text{ " " " } a > -\infty \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

Sia $a \in \mathbb{R}$,

$$[a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$$

$$(a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$$

$$(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$$

$$(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$$

$$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

Def Dato un insieme $I \subseteq \mathbb{R}$, si chiama **MAGGIORANTE** di I un numero reale k tale che $k \geq a \quad \forall a \in I$.

Es $I = (-\infty, 2]$, ogni $k \geq 2$ è un maggiorante di I

$I = [0, +\infty)$, non esistono maggioranti.

Un insieme $I \subseteq \mathbb{R}$ si dice **LIMITATO SUPERIORMENTE** se ammette maggioranti.

Def Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ limitato superiormente. Sia K il più piccolo dei

maggioranti di I , allora k si chiama MASSIMO di I se $k \in I$,
e si chiama ESTREMO SUPERIORE di I se $k \notin I$.

$$k = \max I \text{ oppure } \sup I.$$

ES $I = (-2, +\infty)$ non è limitato superiormente.

$$I = (-2, 1]$$

limitato superiormente, maggioranti $= [1, +\infty)$

$$I = (-2, 1)$$



$$\max I = 1$$

maggioranti, $K = 1$



$$\sup I = 1$$

$(-2, 1]$ ammette massimo, $(-2, 1)$ non ammette massimo

Def Sia $I \subseteq \mathbb{R}$, si chiama ESTREMO SUPERIORE di I il più piccolo dei maggioranti se I è limitato superiormente, $+\infty$ se I non è limitato superiormente.

$$\sup I = \begin{cases} \max I, & \text{se } I \text{ è limit. sup. e ammette massimo} \\ \text{minimo dei maggioranti,} & \text{se } I \text{ è limit. sup. e non ammette massimo} \\ +\infty, & \text{se } I \text{ non è limit. sup.} \end{cases}$$

	$\sup I$	$\max I$
$(0, +\infty)$	$+\infty$	$\nexists$ = non esiste
$(3, 5)$	5	$\nexists$ = non esiste
$[3, 5]$	5	5

Def Un insieme $I \subseteq \mathbb{R}$ ammette un MINORANTE se esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che $k \leq a \forall a \in I$.

Un insieme $I \subseteq \mathbb{R}$ si dice LIMITATO INFERIORMENTE se ammette minoranti.

ESTREMO INFERIORE di I , $\inf I$, è $-\infty$ se I non

è limitato inferiormente, è il più grande dei minori di I e limitato inferiormente.

MINIMO di I , $\min I$, esiste se I è limitato inferiormente e il più grande dei minori appartiene a I , e coincide con il più grande dei minori.

ES $I = (-\infty, 2]$ non è limitato inferiormente, $\inf (-\infty, 2] = -\infty$.

$I = (1, 2]$

~~minori~~
minori 1 2

$I = [1, 2]$

~~minori~~
minori 1 2

limitati inferiormente, minori
" $(-\infty, 1]$

$$\sup (1, 2] = \inf [1, 2] = 1.$$

$$\min (1, 2] \text{ non esiste, } \min [1, 2] = 1.$$



FUNZIONI REALI

Def Una funzione reale di variabile reale è una legge

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x)$$

che ad un numero reale x , associa uno ed un solo numero reale $f(x)$. Si chiama **DOMINIO** di f l'insieme di partenza, e si chiama **CODOMINIO** di f l'insieme di arrivo.

$$f: \underset{\text{dominio}}{\mathbb{R}} \longrightarrow \underset{\text{codominio}}{\mathbb{R}}$$

Si chiama **DOMINIO NATURALE** D l'insieme del dominio in cui la legge f è ben definita.

$$f: \underset{\text{dominio}}{D \subseteq \mathbb{R}} \longrightarrow \underset{\text{codominio}}{\mathbb{R}}$$

Si chiama **IMMAGINE** di f è il sottoinsieme del codominio di valori ottenuti,

$$\text{Imm } f := \left\{ y \in \underset{\text{codominio}}{\mathbb{R}} : \exists x \in D \text{ tale che } f(x) = y \right\}$$

$$\text{Imm } f = f(D).$$

ES $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$

D dominio naturale $= [0, +\infty)$

$\text{Imm } f = [0, +\infty)$. Infatti, se $y \in [0, +\infty)$, $\exists x \in [0, +\infty)$

tale che $\sqrt{x} = y$? $x = y^2$

Esiste soluzione $x \in D$ di $f(x) = y$.

Si chiama GRAFICO di $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ il sottoinsieme
del prodotto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ dato da
dom codom

$$\text{Graf } f := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in D \subseteq \mathbb{R}, y = f(x) \}$$

ES $f(x) = \sqrt{x}$, $D = [0, +\infty)$

$\text{Imm } f = [0, +\infty)$

x	$f(x)$
1	$\sqrt{1} = 1$
4	$\sqrt{4} = 2$
9	$\sqrt{9} = 3$
16	$\sqrt{16} = 4$
$\vdots$	$\vdots$

