

Algebra delle matrici

$$- A \in \mathcal{M}(m \times n) \quad v \in \mathbb{R}^n, \quad Av \in \mathbb{R}^m$$

$$A: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$- A \in \mathcal{M}(\underline{m} \times \underline{n}), \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(\underline{n} \times \underline{1}) \Rightarrow Av \in \mathcal{M}(\underline{m} \times \underline{1})$$

• Prodotto tra matrici

$$A \in \mathcal{M}(\underline{m} \times \underline{n}), B \in \mathcal{M}(\underline{n} \times \underline{k}) \longrightarrow AB \in \mathcal{M}(\underline{m} \times \underline{k})$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix}$$

ES $A \in \mathcal{M}(\underline{3} \times \underline{2}), B \in \mathcal{M}(\underline{2} \times \underline{4}) \longrightarrow AB \in \mathcal{M}(\underline{3} \times \underline{4})$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad AB = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 10 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A \in \mathcal{M}(\underline{m} \times \underline{n}), B \in \mathcal{M}(\underline{n} \times \underline{k}) \longrightarrow AB \in \mathcal{M}(\underline{m} \times \underline{k})$$

$$A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad B: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \xrightarrow{?} \quad AB: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\mathbb{R}^k \xrightarrow{B} \mathbb{R}^n \xrightarrow{A} \mathbb{R}^m$$

AB è la composizione $A \circ B$



Matrici quadrate, $A \in \mathcal{M}(n \times n)$, $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

Def la matrice identità $I \in \mathcal{M}(n \times n)$ è la matrice

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Prop. $I : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $Iv = v \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$

• $A \in \mathcal{M}(n \times n)$, $AI = IA = A$

Def Una matrice $A \in \mathcal{M}(n \times n)$ è INVERTIBILE se esiste una matrice $A^{-1} \in \mathcal{M}(n \times n)$, detta matrice inversa, tale che

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I \in \mathcal{M}(n \times n)$$

oss $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $\exists A^{-1}$ t.c. $AA^{-1} = I$?

Se sì, $\exists A^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$ tale che, $I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$,

$$A \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} b_{12} \\ \vdots \\ b_{n2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \quad A \begin{pmatrix} b_{1n} \\ \vdots \\ b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Se sì, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Im}(A)$, ossia $\text{Im}(A) = \mathbb{R}^n$,

ossia $\text{rank}(A) = n$, ossia $\det(A) \neq 0$.

Prop. Una matrice $A \in \mathcal{M}(n \times n)$ è invertibile se e solo se $\det(A) \neq 0$.

• La matrice A^{-1} si trova scrivendo $B = (A | I)$ e portandolo con le mosse di Gauss a $B = (I | A^{-1})$.

Esempio $A \in \mathcal{M}(2 \times 2)$, $A = \begin{pmatrix} 2 & k \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$.

Trovare per quali $k \in \mathbb{R}$ A è invertibile, e in caso trovare A^{-1} .

$$A \text{ è invertibile} \Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \Leftrightarrow 2 \cdot 0 - 1 \cdot k \neq 0$$

$$-k \neq 0$$

$$k \neq 0$$

Poniamo $k \neq 0$,

$$B = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & k & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$B_1 \leftrightarrow B_2 \quad B = \left(\begin{array}{cc|cc} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 \\ 2 & k & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$B_2 \leftarrow B_2 - 2B_1, \quad B = \left(\begin{array}{cc|cc} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{k} & 1 & -2 \end{array} \right)$$

$$B_2 \leftarrow \frac{1}{k} B_2, \quad B = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{k} & -\frac{2}{k} \end{array} \right)$$

I A^{-1}

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{k} & -\frac{2}{k} \end{pmatrix}$$

Verifica $AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & k \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{k} & -\frac{2}{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{k} & -\frac{2}{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & k \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Trovare A^{-1} .

$$\det(A) = (-1 \cdot -2 + 0) - (-1 \cdot -1 + 0) = -3 + 2 = -1 \neq 0$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

$$B = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$B_3 \leftarrow B_3 - B_1$$

$$B = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$B_3 \leftrightarrow B_2, \quad B = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$B_2 \leftrightarrow -B_2, \quad B_3 \leftrightarrow -B_3$$

$$B = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$B_3 \leftarrow B_3 - B_2$$

$$B = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

$$B_1 \leftarrow B_1 - 2B_2 - B_3$$

$$B = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

$I \qquad A^{-1}$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio

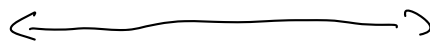
$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ -y - z = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{soluzioni} = \{v \in \mathbb{R}^3 : Av = b\}$$

$$\bullet \operatorname{rank}(A) = 3 \Leftrightarrow \det(A) = -1 \neq 0$$

$$\operatorname{rank}(C) = 3$$

$$\bullet Av = b \Leftrightarrow v = A^{-1}b = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$



Autovettori ed autovalore

Def Si dice che una matrice $A \in M(n \times n)$ ha autovettore $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ con autovalore $\lambda \in \mathbb{R}$ se $Av = \lambda v$.

oss Se v è autovettore con autovalore $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$Av = \lambda v \Leftrightarrow Av = \lambda Iv \Leftrightarrow Av - \lambda Iv = \underline{0}$$

$$\Leftrightarrow (A - \lambda I)v = \underline{0}$$

$A' := A - \lambda I$, $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ è autovettore con autovalore λ se e solo se v è soluzione di $A'x = \underline{0}$.

$$\text{Quindi } \det(A') = \det(A - \lambda I) = 0$$

• Per trovare gli autovalori di A , bisogna trovare gli zeri del "polinomio caratteristico" $p(\lambda) := \det(A - \lambda I)$

Gli autovettori con autovalore λ sono le soluzioni non nulle del sistema $(A - \lambda I)x = \underline{0}$.

Esempio $A = \begin{pmatrix} 2 & k \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Trovare gli autovalori.

$$A - lI = \begin{pmatrix} 2 & k \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - l \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & k \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} l & 0 \\ 0 & l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-l & k \\ 1 & -l \end{pmatrix}$$

$$p(l) = \det(A - lI) = (2-l)(-l) - k = l^2 - 2l - k$$

$$l^2 - 2l - k = 0 \iff l_{\pm} = 1 \pm \sqrt{1+k} \in \mathbb{R} \text{ per } k \geq -1.$$

- Ad esempio, scegliamo $k=0$, $l_+ = 2$, $l_- = 0$.

$$\text{Esiste } v_+ \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \text{ t.c. } Av_+ = 2v_+$$

$$(A - 2I)x = 0 \iff \begin{pmatrix} 2-2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 0 = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

$$C = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

$$C_1 \leftrightarrow C_2, \quad C = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ y = t \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2t \\ y = t \end{cases}, \quad W = \text{Span} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Esiste } v_- \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \text{ t.c. } Av_- = 0 \cdot v_-$$

$$(A - 0I)x = 0 \iff \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$C = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$C_1 \leftrightarrow C_2, \quad C = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1, \quad C = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases}, \quad W = \text{Span} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Ad esempio, con $k=-1$, $l_{\pm} = 1 \pm \sqrt{1-1} = 1 \pm 0$, $l_+ = l_- = 1$

Cerco autovettori v t.c. $Av = 1 \cdot v$

$$(A - I)x = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

$$C = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$C_2 \leftarrow C_2 - C_1, \quad C = \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ y = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}, \quad W = \text{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio Trovare in $\mathbb{R}^3$, il sottospazio W (vettoriale o affine) di vettori ortogonali a $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 2 \\ k \\ -2 \end{pmatrix}$, e parallelo per $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\text{Cerco } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ che verificano } \begin{aligned} \langle v, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rangle &= x + y - z = b_1 \\ \langle w, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rangle &= 2x + ky - 2z = b_2 \end{aligned}$$

$$b_1 = -1 - 1 - 1 = -3$$

$$b_2 = -2 - k - 2 = -4 - k$$

W è l'insieme delle soluzioni di $\begin{cases} x + y - z = -3 \\ 2x + ky - 2z = -4 - k \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & k & -2 \end{pmatrix}$$

$$A \in \mathcal{M}(2 \times 3)$$

$$\text{rank}(A) = \begin{cases} 1, & k = 2 \\ 2, & k \neq 2 \end{cases}$$

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & k & -2 & -4-k \end{array} \right)$$

$$C \in \mathcal{M}(2 \times 4)$$

$$\text{rank}(C) = \begin{cases} 1, & k = 2 \\ 2, & k \neq 2 \end{cases}$$

W è un sottospazio di dimensione $\begin{cases} 3-1=2, & k=2 \\ 3-2=1, & k \neq 2 \end{cases}$

$$C = \left(\boxed{1} \quad 1 \quad -1 \mid -3 \right)$$

$$C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1$$

$$C = \left(\boxed{1} \quad 1 \quad -1 \mid -3 \right)$$

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & -3 \\ 0 & k-2 & 0 & 2-k \end{array} \right)$$

$k=2$

$$C = \left(\boxed{1} \quad 1 \quad -1 \mid -3 \right)$$

$$\begin{cases} x + y - z = -3 \\ y = t \\ z = s \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -3 - t + s \\ y = t \\ z = s \end{cases}$$

$$W = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{Span} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$k \neq 2$

$$C = \left(\boxed{1} \quad 1 \quad -1 \mid -3 \right)$$

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & -3 \\ 0 & \boxed{k-2} & 0 & 2-k \end{array} \right)$$

$$W = \left(\begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right) + \text{Span} \left(\begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right)$$