

$$\underline{ES} \quad \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + ky + 3z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R} \text{ parametro}$$

Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il sistema ha soluzioni?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & k & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(3 \times 3), \quad C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & k & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \in \mathcal{M}(3 \times 4)$$

Se $k \neq 3, 4$ allora il sistema ha soluzione ($\text{rank}(A) = \text{rank}(C) = 3$)

$\boxed{k=3}$

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \text{rank}(C) = 3 \\ \text{rank}(A) = 2 \end{array} \quad \text{Non esistono soluzioni}$$

$\boxed{k=4}$

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right)$$

$$C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1 \quad C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right)$$

$$C_2 \leftrightarrow C_3 \quad C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

$$C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \quad C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \text{rank}(C) = 3 \\ \text{rank}(A) = 3 \end{array}$$

$$C_2 \leftarrow -C_2$$

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \text{matrice e} \\ \text{scalari} \\ \text{pivot} = 1. \end{array}$$

$$C_2 \leftarrow C_2 + C_3$$

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2 \end{array} \right)$$

$$C_1 \leftarrow C_1 - 2C_2 - C_3$$

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 5 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = -1 \\ z = -2 \end{cases}$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

←—————→
DETERMINANTE

$A \in \mathcal{M}(n \times n)$ matrici quadrate di ordine $n \in \mathbb{N}$.

$n=1$ $A = (a_{11})$ $\det(A) := a_{11}$
"il determinante di A "

$n > 1$ $A \in \mathcal{M}(n \times n)$

- Si chiama sottrici di A una matrice ottenuta cancellando un numero arbitrario di righe e/o colonne.
- Indichiamo con $\hat{A}_{ij}$ la sottrici $(n-1) \times (n-1)$ ottenuta cancellando in A la riga i -esima e la colonna j -esima.

Def Il determinante di $A \in \mathcal{M}(n \times n)$ è $A = (a_{ij})$

$$\det(A) := \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det(\hat{A}_{ij})$$

$$= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\hat{A}_{ij})$$

SVILUPPO PER
RIGA i

SVILUPPO PER
COLONNA j

$n=2$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^2 (-1)^{1+j} a_{1j} \det(\hat{A}_{1j})$$

$$= (-1)^{1+1} a_{11} \det(\hat{A}_{11}) + (-1)^{1+2} a_{12} \det(\hat{A}_{12})$$

$$= (+1) a_{11} \det(a_{22}) + (-1) a_{12} \det(a_{21})$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

SVILUPPO PER
RIGA 1

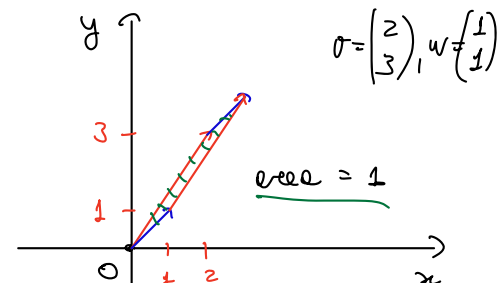
$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} a_{21}$$

⊕ ⊖

ES

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 - 1 \cdot 3 = 2 - 3 = -1$$

⊕ ⊖



Prop. Se $A \in \mathcal{M}(2 \times 2)$, $|\det(A)|$ è l'area del parallelogramma che ha le due colonne di A come lati

- $\det(A) \neq 0 \iff$ le due colonne di A sono lin. indipendenti.
- $\det(A) \neq 0 \iff \text{rank}(A) = 2$.

ES

$$A = \begin{pmatrix} 2 & k \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}. \quad \text{Determinare } \text{rank}(A) \text{ al variare di } k \in \mathbb{R}.$$

- $\text{rank}(A) \in \{0, 1, 2\}$
- $\text{rank}(A) \neq 0$ perché $A \neq 0$.

$$\det(A) = 2 \cdot 1 - k \cdot 3 = 2 - 3k$$

$$\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow 2 - 3k \neq 0 \Leftrightarrow k \neq \frac{2}{3}$$

Se $k \neq \frac{2}{3}$, allora $\text{rank}(A) = 2$.

Se $k = \frac{2}{3}$, allora $\text{rank}(A) = 1$.

$n=3$

ES

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & k & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

SVILUPPO PER
RIGA 2

$$\det(A) = \sum_{j=1}^3 (-1)^{2+j} a_{2j} \det(\hat{A}_{2j})$$

$$= (-2) \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + k \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + (-3) \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (-2)(4 - 1) + k(2 - 1) + (-3)(1 - 2) =$$

$$= -6 + k + 3 = k - 3$$

• REGOLA DI SARRUS

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} +$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

⊕ ⊖

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & k & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (2k + 6 + 2) - (k + 3 + 8) =$$

$$= 2k + 8 - k - 11 = k - 3$$

$$\begin{array}{ccccc}
 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\
 2 & k & 3 & 2 & k \\
 1 & 1 & 2 & 1 & 1
 \end{array}$$

Prop. Se $A \in M(3 \times 3)$, $|\det(A)|$ è il volume del parallelepipedo che ha le tre colonne di A come lati.

- $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow$ le tre colonne sono lin. indipendenti
- $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \text{rank}(A) = 3$.

ES $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & k & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Determinare $\text{rank}(A)$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

- $\text{rank}(A) \in \{0, 1, 2, 3\}$
- $\text{rank}(A) \neq 0$ perché $A \neq 0$ per qualsiasi k .
- $\det(A) = k - 3$

Se $k \neq 3$ allora $\det(A) \neq 0$ e $\text{rank}(A) = 3$

Se $k = 3$, $\det(A) = 0$, $\text{rank}(A) \in \{1, 2\}$. (?)



Prop Date $A \in M(m \times n)$, il rango di A è uguale all'ordine della più grande sottomatrice quadrata di A che ha determinante non nullo.

ES $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & k & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $k = 3$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\hat{A}_{11} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \det(\hat{A}_{11}) = 6 - 3 = 3 \neq 0$$

$$\Rightarrow \text{rank}(A) = 2.$$

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \quad \text{rank}(C) = 3$$

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = (0 + 0 + 6) - (3 + 0 + 0) = 6 - 3 = 3 \neq 0$$

$$\begin{array}{ccccc} 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

Teorema di ROUCHÉ - CAPELLI

Sia dato un sistema lineare di m equazioni in n variabili,
 $A \in \mathbb{M}(m \times n)$, $b \in \mathbb{R}^m$, $C = (A | b) \in \mathbb{M}(m \times (n+1))$.

- $Ax = b$ ha soluzione se e solo se $\text{rank}(A) = \text{rank}(C)$
- Se $b = \underline{0}$, il sistema è omogeneo, le soluzioni sono un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

$C = (A | \underline{0}) \longrightarrow C =$ matrice a zeri, pivot = 1, elementi nulli nelle colonne dei pivot.

ES $C = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & * & 0 \\ 0 & \boxed{1} & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \text{rank}(C) = \text{rank}(A) = 2$

parametri liberi = # colonne senza pivot = $n - \text{rank}(A)$

Le soluzioni sono un sottospazio vettoriale di $\dim = n - \text{rank}(A)$

- Se $b \neq \underline{0}$, il sistema è non omogeneo.

$Ax = b$. (i) Se v_1 è soluzione, $Av_1 = b$, e v_2 è soluzione, $Av_2 = b$

con $v_1 \neq v_2$, allora $A(v_1 - v_2) = Av_1 + A(-v_2) = Av_1 - Av_2 = b - b = 0$,

ossia $v_1 - v_2$ è soluzione del sistema omogeneo $Ax = 0$.

(11) Sia v soluzione, $Av_1 = b$, e sia w soluzione di $Ax = 0$, quindi

$Aw = 0$, allora $A(v+w) = Av + Aw = b + 0 = b$, quindi

$v+w$ è soluzione di $Ax = b$.

Le soluzioni W di $Ax = b$ sono $W = v + U$, dove v è una soluzione di $Ax = b$ e U è il sottosp. vettoriale delle soluzioni di $Ax = 0$.

Se $U = \text{Span}(u_1, \dots, u_k)$ allora

$$W = v + \text{Span}(u_1, \dots, u_k)$$

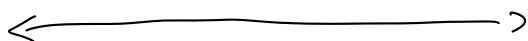
Def $W \subset \mathbb{R}^m$ che si scrive come $W = v + U = \{v + u : u \in U\}$, dove $v \in \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^m$ sottosp. vett., si chiama SOTTOSPazio AFFINE.

ES $\mathbb{R}^2$. Sottospazi affini sono: un singolo vettore ($v + 0$); le rette; $\mathbb{R}^2$.

$\mathbb{R}^3$. Sottospazi affini sono: un singolo vettore; le rette; i piani; $\mathbb{R}^3$.

TEOREMA (di Rouché - Capelli). Un sistema lineare di m equazioni in n variabili, con $A \in M(m \times n)$ matrice dei coefficienti, $b \in \mathbb{R}^m$ vettore dei termini noti, $C = (A|b)$, ha almeno una soluzione se e solo se $\text{rank}(A) = \text{rank}(C)$.

Se $\text{rank}(A) = \text{rank}(C)$, l'insieme delle soluzioni è un sottospazio vettoriale di dimensione $n - \text{rank}(A)$ se $b = 0$, è un sottospazio affine di dimensione $n - \text{rank}(A)$ se $b \neq 0$.



ES

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + ky + 2z = 1 \\ x + 2y + kz = 1 \end{cases}$$

Al variare di $k \in \mathbb{R}$, descrivere le soluzioni in $\mathbb{R}^3$ e trovarle.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 2 \\ 1 & 2 & k \end{pmatrix}$$

$$A \in \mathcal{M}(3 \times 3)$$

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$b \in \mathbb{R}^3$$

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & k & 2 & 1 \\ 1 & 2 & k & 1 \end{array} \right)$$

$$C \in \mathcal{M}(3 \times 4)$$

$$\text{rank}(A) = \begin{cases} 1 & k=0, 2 \\ 3 & k \neq 0, 2 \end{cases}$$

$$\text{rank}(A) \leq \text{rank}(C) = \begin{cases} 2 & k=2 \\ 3 & k \neq 0, 2, k=0 \end{cases}$$

$$\text{rank}(A) = 3 \Leftrightarrow \det(A) \neq 0. \Leftrightarrow k \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$$

$$\det A = (k^2 + 2 + 2) - (k + 4 + k) = k^2 + 4 - 2k - 4 = k^2 - 2k = k(k-2)$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 2 & 1 & k \\ 1 & 2 & k & 1 & 2 \end{array}$$

• Se $k \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$, il sistema ha soluzione. Le soluzioni
 è un sottospazio affine di dim $3 - \text{rank}(A) = 3 - 3 = 0$.
 Ovvero le soluzioni è unica.

$$k=0$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 0 - 4 = -4 \neq 0$$

$$\Rightarrow \text{rank}(A) = 2$$

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad 2 \leq \text{rank}(C) \leq 3$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (2 + 2 + 0) - (0 + 0 + 0) = 4 \neq 0$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \text{rank}(C) = 3$$

Il sistema non ha soluzione

• $k=2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$$

$$\Rightarrow \text{rank}(A) = 2$$

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (2 + 1 + 0) - (0 + 2 + 1) = 3 - 3 = 0$$



$$\text{rank}(C) = 2$$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}$$

Il sistema ha soluzioni date da un sottospazio affine di dimensione $3 - \text{rank}(A) = 3 - 2 = 1$.

• Troviamo le soluzioni

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & k & 2 & 1 \\ 1 & 2 & k & 1 \end{array} \right)$$

$$C_2 \leftarrow C_2 - C_1$$

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & k-1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & k & 1 \end{array} \right)$$

$$C_3 \leftarrow C_3 - C_1$$

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & k-1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k-1 & 1 \end{array} \right)$$

Se $k=1$,

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$C_2 \leftrightarrow C_3 \quad C = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{array} \right)$$

$$C_1 \leftarrow C_1 - C_2 - C_3 \quad C = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{array} \right)$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{Se } k \neq 1, \quad C = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{k-1} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k-1 & 1 \end{array} \right)$$

$$C_3 \leftarrow (k-1)C_3 - C_2 \quad C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & k-1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & (k-1)^2-1 & k-2 \end{array} \right)$$

$$(k-1)^2 - 1 = k^2 - 2k$$

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{k-1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{k(k-2)} & k-2 \end{array} \right)$$

- $k=0$ no he solution

Se $k \neq 0, 2$,

$$C_2 \leftarrow \frac{1}{k-1} C_2, \quad C_3 \leftarrow \frac{1}{k(k-2)} C_3 \quad C = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & \frac{1}{k-1} & \frac{1}{k-1} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{1}{k} \end{array} \right)$$

$$C_2 \leftarrow C_2 - \frac{1}{k-1} C_3, \quad C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \frac{1}{k-1} = \frac{1}{k} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{k} \end{array} \right)$$

$$C_1 \leftarrow C_1 - C_2 - C_3, \quad C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{k} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{k} \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{k} \end{array} \right) /$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{2}{k} \\ \frac{1}{k} \\ \frac{1}{k} \end{pmatrix} \right\}$$

Se $k=2$,

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$C_1 \leftarrow C_1 - C_2$,

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

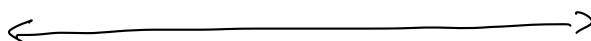
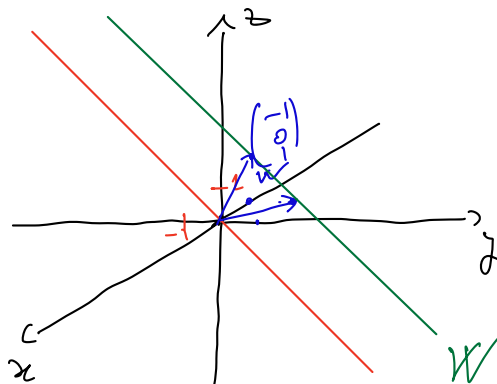
$$\begin{cases} x = -1 \\ y + z = 1 \\ z = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}$$

$$W = \overbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}^w + \underbrace{\text{Span} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}^u$$

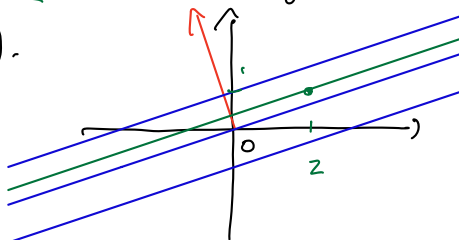
ovvero vett. della soluz. di $Ax=0$

$k=2$,

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + 2z = 1 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{cases}$$



ES Trovare la retta in $\mathbb{R}^2$ ortogonale a $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ e passante per il punto $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.



$$\mathcal{W} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \text{Span} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x - 3y = -1 \right\}$$