

Sia V spazio vettoriale di dimensione d ($\mathbb{R}^n$ ha dimensione n)
 quindi esistono d vettori in V , $v_1, \dots, v_d$, che sono linearmente indipen-
 denti e $\text{Span}(v_1, \dots, v_d) = V$.

Siano $U, W \subseteq V$ sottospazi vettoriali (es: $\text{Span}(v_1, \dots, v_k)$, k vettori
 in V),

Somma $U + W := \{u + w : u \in U, w \in W\}$

Se $U = \text{Span}(u_1, u_2, \dots, u_k)$, $W = \text{Span}(w_1, \dots, w_h)$ allora

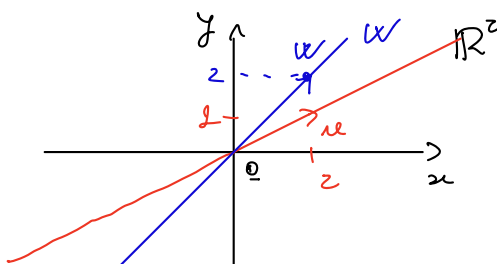
$$U + W = \text{Span}(u_1, \dots, u_k, w_1, \dots, w_h)$$

Prop $U + W$ è un sottospazio vettoriale di V .

$$U + W \supseteq U, \quad U + W \supseteq W.$$

ES $\mathbb{R}^2$, $U = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : y = x \right\} = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$

$$U + W = ?$$



$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ sono lin. indipendenti ($\nexists \lambda \in \mathbb{R}$ t.c. $u = \lambda w$)
 "non esiste"

$$U + W = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \mathbb{R}^2$$

OSS In uno spazio vett. V di dimensione d , se ho d vettori
 linearmente indipendenti, $v_1, \dots, v_d$, allora
 $\text{Span}(v_1, \dots, v_d) = V$.

ES $\mathbb{R}^2$, $U = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, $W = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$, $U + W = ?$

$$U + W = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}\right) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = U = W$$

$$\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ lin. dipendenti}$$

ES $\mathbb{R}^3$, $U = \text{Span} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $W = \text{Span} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$U+W = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ è un piano in $\mathbb{R}^3$ passante per 0

$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ lin. indipendenti

ES $\mathbb{R}^3$.

U	W	$U+W$	
retta	retta	piano	(se vett. lin. indep.)
retta	retta	retta	(se vett. lin. dip.)
piano	retta	$\mathbb{R}^3$	(3 vett. lin. indep.)
piano	retta	U piano	(se la retta giace sul piano)
piano	piano	$U=W$	(se i piani coincidono)
piano	piano	$\mathbb{R}^3$	(se i piani non coincidono)

Intersezione $U \cap W := \{ v \in V : v \in U \text{ e } v \in W \}$

OSS Nei sistemi lineari di m equazioni in n variabili, lo spazio delle soluzioni è l'intersezione di m spazi di soluzioni.

ES $\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ x-z=0 \end{cases}$ l'insieme delle soluzioni di questo sistema lineare

omogeneo di 2 eq. in 3 variabili è $U \cap W$, dove

$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 2x+y-z=0 \right\}$, $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x-z=0 \right\}$

Prop $U \cap W$ è un sottospazio vettoriale.



Teorema (Formula di Grassmann). Dati U, W sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V , si ha

$\dim(U+W) + \dim(U \cap W) = \dim U + \dim W$

ES $\mathbb{R}^2$

$\dim U$	$\dim W$	$\dim(U+W)$	$\dim(U \cap W)$
0 ($U=\{\emptyset\}$)	2 ($W=\mathbb{R}^2$)	2	0
1 (retta)	1 (retta)	2 (lin indep)	0
1	1	1 (lin dep)	1
1 (retta)	2 ($\mathbb{R}^2$)	2	1

$\mathbb{R}^3$

$\dim U$	$\dim W$	$\dim(U+W)$	$\dim(U \cap W)$
1	1	2 (lin indep)	0 ($\{\emptyset\}$)
1	1	1 (lin dep)	1
2 piano	1 retta	2 ($\text{retta} \in \text{piano}$)	1 retta
2	1	3 ($\text{retta} \notin \text{piano}$)	0 ($\{\emptyset\}$)
2	2	2 ($U=W$)	2 ($U=W$)
2	2	3 ($U \neq W$)	1 (retta)

Algoritmo per la soluzione di sistemi lineari

Sistemi lineari di m eq. in n variabili

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \quad A\underline{x} = \underline{b}$$

$$A \in \mathcal{M}(m \times n), \quad A = (a_{ij}), \quad \text{coefficienti}$$

$$\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m, \quad \text{termini noti}$$

Matrice completa $C = (A | b) \in \mathcal{M}(m \times (n+1))$

Moore di Gauss

C_i indica la riga i -esima di C .

(I) Scambiare due righe di C .

(II) Moltiplicare una riga per un $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$.

$$(2x - y + z = 3 \Leftrightarrow 6x - 3y + 3z = 9)$$

(III) Sostituire una riga con una combinazione lineare di lei stessa con altre righe

(al posto di C_1 , scriverò $C_1 + 2C_2$)

$$\underline{\text{ES}} \quad \begin{cases} x + y - z = 5 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 6 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

Scopo Applicare a C le mosse di Gauss per ottenere una matrice "a scalini", con i pivot uguali a 1, e i coefficienti sopra i pivot nulli.

Def. In una matrice C , si chiama pivot della riga C_i il primo coefficiente diverso da 0 (guardato da sinistra a destra).

Una matrice C si dice a scalini se il pivot della riga C_i è più a destra del pivot della riga C_{i-1} .

$$\underline{\text{ES}} \quad C = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{2} & 1 \\ \boxed{1} & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

pivot

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \boxed{2} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \end{pmatrix}$$

pivot

non sono a scalini

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} \boxed{3} & 1 & -1 \\ 0 & \boxed{-2} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sono a scalini

Scopo

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \end{array} \right), \quad C = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -1 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ y + z = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -1 - t \\ z = t \end{cases}$$

Esercizi

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5z = 0 \\ 4x + y - 7z = 0 \end{cases}$$

Sisteme lineare omogenee di 2 equazioni
in 3 variabili.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & -7 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}(2 \times 3), \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & -7 & 0 \end{array} \right)$$

Soluzioni: V sottosp. vett. di $\mathbb{R}^3$ di dim 1 oppure 2.

$$C_2 \rightarrow C_2 - 2C_1$$

$$C = \begin{pmatrix} \boxed{12} & -3 & 5 & \big| & 0 \\ 0 & \boxed{7} & -17 & \big| & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e scalini:}$$

$$C_2 \rightarrow \frac{1}{2} C_1, \quad C_2 \rightarrow \frac{1}{7} C_2$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{17}{7} & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{e} = \text{colim:} \\ \text{pwt} = 1. \end{array}$$

$$C_1 \rightarrow C_2 + \frac{3}{2} C_2$$

$$C = \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 0 & -\frac{8}{7} \\ 0 & \boxed{1} & -\frac{17}{7} \end{array} \right)$$

e scalini
pivot = 2
termini sopra i pivot
nulli

$$\frac{5}{2} + \frac{3}{2} \left(-\frac{17}{7} \right) = \frac{35-51}{14} = -\frac{16}{14} = -\frac{8}{7}$$

Il sistema di partenza è equivalente al sistema
$$\begin{cases} x - \frac{8}{7}z = 0 \\ y - \frac{17}{7}z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - \frac{8}{7}z = 0 \\ y - \frac{17}{7}z = 0 \\ z = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{8}{7}t \\ y = \frac{17}{7}t \\ z = t \end{cases}$$

$$W = \text{Span} \begin{pmatrix} 8/7 \\ 17/7 \\ 1 \end{pmatrix} = \text{Span} \begin{pmatrix} 8 \\ 17 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{red}$$

•
$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases} \quad \text{sistema lineare omogeneo di 3 eq. in 3 variabili}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(3 \times 3) \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$C_2 \rightarrow C_2 - 2C_1$$

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{-3} & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$C_3 \rightarrow C_3 - C_1$$

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{-3} & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

$$C_3 \rightarrow C_3 + \frac{1}{3}C_2$$

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{-3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-\frac{7}{3}} & 0 \end{array} \right) \quad \text{e scalini}$$

$$-2 + \frac{1}{3}(-1) = -2 - \frac{1}{3} =$$

$$C_2 \rightarrow -\frac{1}{3}C_2, \quad C_3 \rightarrow -\frac{3}{7}C_3$$

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \text{e scalini} \\ \text{pivot} = 1 \end{array}$$

$$C_2 \rightarrow C_2 - \frac{1}{3}C_3$$

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \end{array} \right)$$

$$C_1 \rightarrow C_1 - (C_2 + C_3)$$

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \end{array} \right)$$

e scalini
pivot = 1
termini sopra i pivot
nulli

Il sistema di partenza è equivalente a $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$

Soluzioni $W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

• $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 3y = 4 \end{cases}$ Sistema lineare non omogeneo di 2 eq. in 2 variabili

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ $C = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{array} \right)$

$C_2 \rightarrow C_2 - \frac{1}{2} C_1$, $C = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{7}{2} \end{array} \right)$ e scalari

$C_1 \rightarrow \frac{1}{2} C_1$, $C_2 \rightarrow \frac{2}{7} C_2$, $C = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$ e scalari
prot = 1

$C_1 \rightarrow C_1 + \frac{1}{2} C_2$, $C = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$ ok

$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ $W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

• $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - \frac{1}{2}y = 4 \end{cases}$ $C = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 4 \end{array} \right)$

$C_2 \rightarrow C_2 - \frac{1}{2} C_1$, $C = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} \end{array} \right)$ $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 0 = \frac{7}{2} \end{cases}$

Non esistono soluzioni.

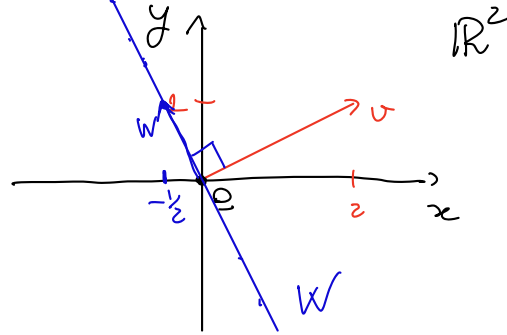
Prodotto scalare In $\mathbb{R}^n$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$, si chiama

prodotto scalare (euclideo) il numero $v \cdot w := v_1 w_1 + v_2 w_2 + \dots + v_n w_n$
 $\langle v, w \rangle$

$$\in \mathbb{S} \quad \text{In } \mathbb{R}^2, \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}, \quad v \cdot w = v_1 w_1 + v_2 w_2 = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos(\angle v, w)$$

Esercizio Chi è lo spazio dei vettori ortogonali (o perpendicolari) al vettore $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$?

$$W = \text{Span}(w)$$



$$w = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ incognite}, \quad v \cdot w = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$2x + y = 0 \quad \text{eq. lineare omog. in 2 variabili}$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 2x + y = 0 \right\}$$

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C_1 \rightarrow \frac{1}{2} C_1, \quad C = \begin{pmatrix} \boxed{1} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + \frac{1}{2}y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{2}y = 0 \\ y = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2}t \\ y = t \end{cases}$$

$$W = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Esercizio Trovare l'insieme dei vettori in $\mathbb{R}^3$ ortogonali a

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$W \text{ soluzioni di } \begin{cases} x + y - z = 0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ 2x - y + z = 0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x = 0 \end{cases} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ 3x = 0 \end{cases} \quad \text{Sist. lineare omogenea di 3 eq. in 3 variabili}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$C_1 \leftrightarrow C_3, \quad C = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{3} & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$C_2 \rightarrow C_2 - \frac{2}{3}C_1, \quad C = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$C_3 \rightarrow C_3 - \frac{1}{3}C_1, \quad C = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$C_3 \rightarrow C_3 + C_2, \quad C = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \text{e scalari}$$

$$C_1 \rightarrow \frac{1}{3}C_1, \quad C_2 \rightarrow -C_2, \quad C = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \underline{\text{Ok}}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y - z = 0 \\ z = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

$$W = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{vettore}$$