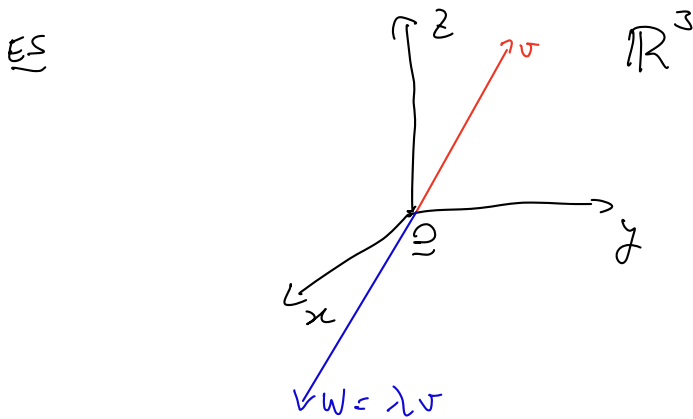


$(\mathbb{R}^n, +)$ spazio vettoriale, Sottospazi vettoriali (esempi in $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$)

Def Due vettori $v, w \in V$ sp. vettoriale si dicono LINEARMENTE DIPENDENTI se $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tale che $v = \lambda w$.



Def Dati $v_1, \dots, v_n \in V$ sp. vettoriale si dicono LINEARMENTE DIPENDENTI se $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ non tutti nulli tali che

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = \underline{0}$$

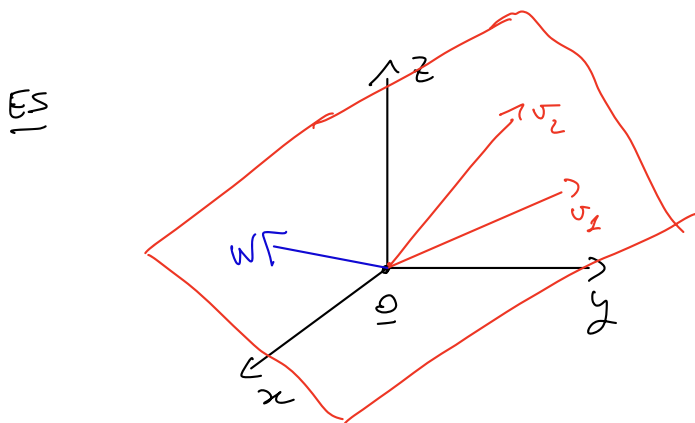
ES $v_1, v_2 \in V$, $\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ non tutti nulli t.c. $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \underline{0}$

Se $\lambda_1 \neq 0$, $v_1 = \underbrace{\left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)}_{\lambda \in \mathbb{R}} v_2$

OSS $v_1, \dots, v_n \in V$, $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ non tutti nulli t.c.

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \underline{0}$$

Se $\lambda_1 \neq 0$, $v_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} v_3 - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1} v_n$



$$w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$$

v_1, v_2, w sono linearmente dipendenti

Def Dati $v_1, \dots, v_n \in V$ si dicono LINEARMENTE INDIPENDENTI se $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \underline{0}$ allora $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

ES - $v_1, v_2 \in V$ lin. indipendenti se v_1 non è multiplo di v_2
 - $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ " " se non stanno sulla stessa retta passante per l'origine

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \text{lin. } \cancel{\text{dip}} \quad \text{indip}$$

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ t.c. } v_2 = \lambda v_1? \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda \\ \lambda \\ 3\lambda \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 = 2\lambda \\ 2 = \lambda \\ -6 = 3\lambda \end{cases} \quad \cancel{\exists} \lambda \quad \underline{\text{NO}}$$

$$- \quad v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{lin. } \cancel{\text{dip}} \quad \text{indip}$$

$$\exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \text{ non tutti nulli t.c. } \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = \underline{0}?$$

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{\text{SÌ}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ -\lambda_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\lambda_3 \\ 3\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

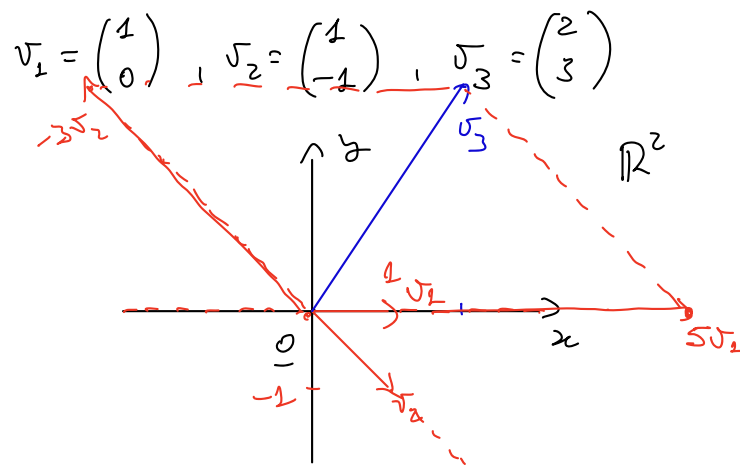
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 \\ -\lambda_2 + 3\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\lambda_1 = 3\lambda_3, \quad \lambda_1 + 5\lambda_3 = 0$$

$$\underline{\lambda_1 = -5, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 1}$$



In $\mathbb{R}^2$, se v_1, v_2 sono lin. indep., per $\{\lambda v_1 : \lambda \in \mathbb{R}\}$ e $\{\lambda v_2 : \lambda \in \mathbb{R}\}$, facendo tutte le possibili somme troviamo tutti i vettori di $\mathbb{R}^2$.

Dato $v_3 \in \mathbb{R}^2 \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ t.c. $v_3 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$. Quindi v_1, v_2, v_3 sono lin. dipendenti.

$$-5v_1 + 3v_2 + v_3 = \underline{0} \Leftrightarrow v_3 = 5v_1 - 3v_2$$



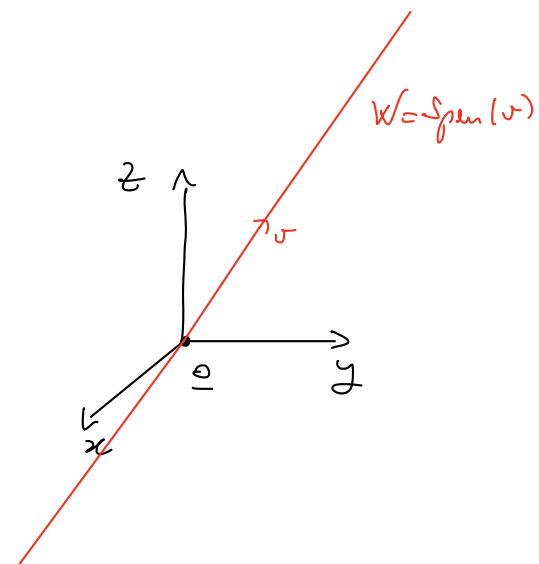
Def Dati $v_1, \dots, v_n \in V$, si chiama SOTTOSPAZIO GENERATO da $v_1, \dots, v_n$ il sottospazio vettoriale W di V dato da

$$W = \left\{ \underbrace{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n}_{\text{combinazione lineare}} : \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} \right\}$$

combinazione lineare

Si scrive $W = \text{Span}(v_1, \dots, v_n)$

ES $\mathbb{R}^3$, $W = \text{Span}(v)$ con $v \neq \underline{0}$.



$$\mathbb{R}^2, \quad y = 2x \iff 2x - y = 0 \quad W = \text{Span}(v) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

$$W = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ 2\lambda \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

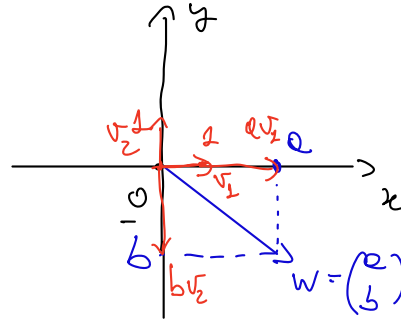
←————→

Def Si dice che uno spazio vettoriale V ha DIMENSIONE $d \in \mathbb{N}_0$ se esistono d vettori $v_1, \dots, v_d \in V$ linearmente indipendenti tali che $V = \text{Span}(v_1, \dots, v_d)$.

ES $\mathbb{R}^2$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ lin. indipendenti, $\mathbb{R}^2 = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

$$w = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\dim \mathbb{R}^2 = 2$$



$$\mathbb{R}^2, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{lin. indipendenti}, \quad \mathbb{R}^2 = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

Prop Se V ha dimensione d , non esistono in V un numero più grande di d di vettori lin. indipendenti.

ES $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, $\mathbb{R}^3 = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

$$w = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Def Se V è sp. vett. di dimensione d , un insieme $v_1, \dots, v_d$ di vettori lin. indep. si chiama BASE di V .

Oss Dato V sp. vett. di dimensione d , i sottospazi vettoriali di V sono: $\{0\}$ che ha dimensione 0 ; V che ha dimensione d ;
 $W = \text{Span}(v_1, \dots, v_k)$, $v_1, \dots, v_k$ lin. indep, con $k = 1, \dots, d-1$.

ES In $\mathbb{R}^2$, trova: $\{\underline{0}\}$ di dim 0; $\mathbb{R}^2$ di dim 2;

$W = \text{Span}(v)$ di dim 1. (le rette passanti per l'origine)

In $\mathbb{R}^3$, Trova: $\{\underline{0}\}$ di dim 0;

$\mathbb{R}^3$ di dim 3;

$W = \text{Span}(v)$ di dim 1 (le rette passanti per $\underline{0}$)

$W = \text{Span}(v_1, v_2)$ con v_1, v_2 lin indep, di dim 2
(i piani passanti per $\underline{0}$)

LUN 5

lezioni 9:30-12:30

MER 7

lez. 8:30-10:30

LUN 12

MER 14

LUN 19 - MER 21 non ci sarà lezione