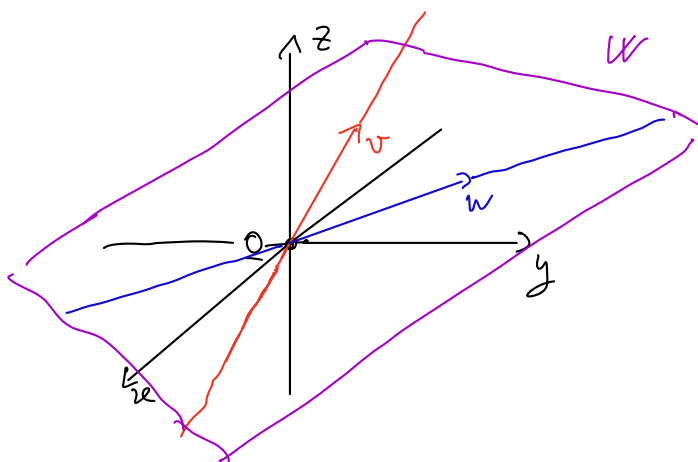


Sottospazi vettoriali

V spazio vettoriale, $W \subseteq V$ è sottospazio vettoriale se: (i) $\underline{0} \in W$; (ii) $v, w \in W \Rightarrow v + w \in W$; (iii) $v \in W, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda v \in W$.

ES $\mathbb{R}^2$, sottospazi vettoriali: $\{\underline{0}\}$, $\mathbb{R}^2$, le rette passanti per $\underline{0}$.

$\mathbb{R}^3$, sottospazi vettoriali: $\{\underline{0}\}$, $\mathbb{R}^3$, le rette passanti per $\underline{0}$, i piani passanti per $\underline{0}$.



$\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$), sottospazi vettoriali: $\{\underline{0}\}$, $\mathbb{R}^n$, ...

Spazio dei polinomi

Spazio dei matrici.

$m, n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{M}(m \times n, \mathbb{R})$. spazio vett. con $+$, mult. per $\lambda \in \mathbb{R}$. $\underline{0} = (0)$ el. neutro

ES $\mathcal{M}(2 \times 2, \mathbb{R}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$, $A = (a_{ij})$

	(i)	(ii)	(iii)
$W = \left\{ A \in \mathcal{M}(2 \times 2, \mathbb{R}) : a = 1 \right\}$	$\times$	$\times$	$\times$
$W = \left\{ \quad \quad : a \geq 0 \right\}$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\times$
$W = \left\{ \quad \quad : a = 0 \right\}$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$

$0 \geq 0 \checkmark$

] sottosp. vett.

SISTEMI LINEARI

Def Si chiama EQUAZIONE LINEARE IN n VARIABILI e coefficienti

esodi un'espressione della forma

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \dots + a_n x_n = b$$

dove $a_1, a_2, \dots, a_n, b \in \mathbb{R}$ e si chiamano coefficienti $a_1, \dots, a_n$ e termine noto b , e le $x_1, \dots, x_n$ sono le incognite.

ES - $2x - 3y + 4z = 2$ eq. lineare in 3 variabili

coefficienti = $\{2, -3, 4\}$, termine noto $b = 2$

- $x - y = 0$ eq. lineare in 3 variabili

$a_1 = 1, a_2 = -1, a_3 = 0, b = 0$

- $x_1 + x_3 - x_4 = -1$ eq. lin. in 4 variabili

$a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = 1, a_4 = -1, b = -1$

Def Un'eq. lineare in n variabili si dice OMOGENEA se il termine noto $b = 0$.

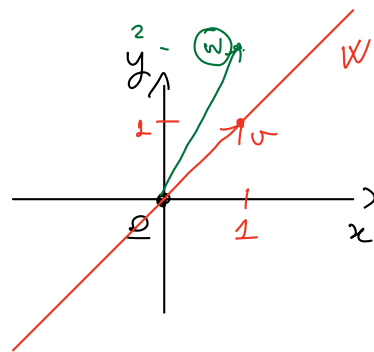
Prop L'insieme delle soluzioni di un'eq. lineare omogenea in n variabili è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = 0, \text{ Soluzioni } W = \left\{ v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n : a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = 0 \right\}$$

ES - $x - y = 0$ eq. lineare omogenea in 2 variabili.

Soluzioni:

$$W = \left\{ v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x - y = 0 \right\}$$



- $x - y = 0$ eq. lineare omogenea in 3 variabili

$$\text{Sol. } W = \left\{ v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x - y = 0 \right\}$$

$\{0\}$ no, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in W$
 retta per $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ no $\updownarrow$?
 piano $x = y$ si
 $\mathbb{R}^3$ no, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \notin W$

Prop L'insieme delle soluzioni di un eq. lineare omogenea in n variabili è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

Dim $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = 0$, $W =$ soluzioni, è un sottosp. vett.

Infatti: (i) $\underline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in W$? $a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + \dots + a_n \cdot 0 = 0$? $\checkmark$.

(ii) $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \in W \Rightarrow v + w \in W$?

$$v \in W \Leftrightarrow a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + a_3 \cdot v_3 + \dots + a_n \cdot v_n = 0$$

$$w \in W \Leftrightarrow a_1 \cdot w_1 + a_2 \cdot w_2 + a_3 \cdot w_3 + \dots + a_n \cdot w_n = 0$$

$$a_1 \cdot (v_1 + w_1) + a_2 \cdot (v_2 + w_2) + a_3 \cdot (v_3 + w_3) + \dots + a_n \cdot (v_n + w_n) = 0 + 0$$

$$\begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{pmatrix} = v + w \quad \Downarrow \quad \in W$$

(iii) $\lambda \in \mathbb{R}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in W \Rightarrow \lambda \cdot v \in W$?

$$v \in W \Leftrightarrow a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + a_3 \cdot v_3 + \dots + a_n \cdot v_n = 0$$

$$\lambda (a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + \dots + a_n \cdot v_n) = \lambda \cdot 0$$

$$a_1 \cdot (\lambda v_1) + a_2 \cdot (\lambda v_2) + \dots + a_n \cdot (\lambda v_n) = 0$$

$\Downarrow$

$$\begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \\ \vdots \\ \lambda v_n \end{pmatrix} = \lambda v \in W$$

□.

Def Un SISTEMA DI m EQUAZIONI LINEARI IN n VARIABILI
a coefficienti reali è un'espressione della forma:
 $m, n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}(n \times n) \quad \text{matrice dei coefficienti}$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \quad \text{incognite}$$
$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

L'insieme delle soluzioni è $W = \left\{ v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m : Av = b \right\}$

Se $b=0$, il sistema si dice OMOGENEO.

Prop L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo di m equazioni in n variabili è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

$$\underline{\text{ES}} \quad \begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x=y \\ 3y-z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=y \\ z=3y \end{cases} \quad W = \left\{ v = \begin{pmatrix} y \\ y \\ 3y \end{pmatrix} : y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$v = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$$

AWISO 19 e 21 ottobre non ci sarà lezione di
El. Med. e Stat.

5 e 12 ottobre, let. 9:40 - 12:00.