

Counting function $\pi(T) := \# \{ \gamma \in PPO / l(\gamma) \leq T \}$

Then $\pi(T) \sim \frac{e^{hT}}{hT}$ dove $h = h(\Phi)$ entropia topologica.

Then (Bowen 73) Se $\Phi = \{\varphi_t\}$ è il flusso geodetico su Σ Riemanniano con curvatura negativa, allora $\exists$ A alfabeto finito, M matrice di transizione, $\tau: \Omega_M \rightarrow \mathbb{R}^+$ positive lipschitziana, tale che dato il flusso $V = \{V_t\}$ su $(\Omega_M)_\tau$ con mappa di base $\sigma: \Omega_M \rightarrow \Omega_M$, si ha che $Z^V(\alpha) / Z^\Phi(\alpha)$ è una funzione analitica e non-zero su $\{ \operatorname{Re}(\alpha) > 1-\varepsilon \}$ per qualche $\varepsilon > 0$, e $h(V) = h(\Phi)$.

$$Z^\Phi(\alpha) = \prod_{\gamma \in PPO} (1 - e^{-\alpha h l(\gamma)})^{-1}$$

$$\begin{aligned} Z^V(\alpha) &= \prod_{\gamma' \in PPO} (1 - e^{-\alpha h l(\gamma')})^{-1} = \exp \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sum_{w \in \operatorname{Fix}(\sigma^n)} \prod_{j=0}^{n-1} e^{-\alpha h \tau(\sigma^j w)} \\ &= Z_{-\alpha h \tau}^\sigma(1) \end{aligned}$$

$$\text{dove } Z_u^\sigma(w) = \exp \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u^n}{n} \sum_{w \in \operatorname{Fix}(\sigma^n)} \prod_{j=0}^{n-1} e^{u(\sigma^j w)}$$

$$u_\alpha(\cdot) = -\alpha h \tau(\cdot), \quad \alpha = 1 + i\gamma, \quad u_\alpha(\cdot) = \underbrace{-h \tau(\cdot)}_{u_1(\cdot)} - i\gamma h \tau(\cdot)$$

$$\underline{\text{Prop}} \quad P(u_1) = P(-h\tau) = 0 \quad (u_1 \text{ è non-nullo})$$

Cor Se 1 non è autovalore massimale di $\mathcal{L}_{u_1+i\gamma}$, allora esiste un intorno U_γ di $1+i\gamma$ in $\mathbb{C}$ per cui $Z_{u_\alpha}^\sigma(1)$ converge $\forall \alpha' \in U_\gamma$.

Prop 1 non è autovalore massimale di $\mathcal{L}_{u_1+i\gamma} \quad \forall \gamma \neq 0$.

dim V è mixing $\Rightarrow V$ è weakly mixing ($\Rightarrow V$ è ergodico)

V è weakly mixing $\Leftrightarrow$ l'operatore di Koopman di V non ha autovalori di modulo 1 diversi da 1.

Supponiamo che 1 sia autovalore massimale di $\mathcal{L}_{\mu_2+i\gamma}$ con autofunzione f_1 . Allora:

$$\begin{aligned} \bullet \quad |f_1(\omega)| &= |(\mathcal{L}_{\mu_2+i\gamma} f_1)(\omega)| = \left| \sum_{\substack{\sigma(\tilde{\omega})=\omega \\ \tilde{\omega} \in \Omega_M}} e^{+\mu_2+i\gamma(\tilde{\omega})} f_1(\tilde{\omega}) \right| = \\ &= \left| \sum_{\sigma(\tilde{\omega})=\omega} e^{-h\tau(\tilde{\omega})} e^{-i\gamma h\tau(\tilde{\omega})} f_1(\tilde{\omega}) \right| \leq (\mathcal{L}_{\mu_2} |f_1|)(\omega) \end{aligned}$$

Sia m la misura t.c. $\mathcal{L}_{\mu_1}^* m = m$. Allora:

$$\int_{\Omega_M} |f_1| dm = \int_{\Omega} (\mathcal{L}_{\mu_2} |f_1|) dm$$

$$\Rightarrow |f_1| = \text{cost} \quad m\text{-q.o.} \quad (\Rightarrow f_1(\omega) = \text{cost} e^{i\varphi_2(\omega)})$$

$$\bullet \quad f_1(\omega) = (\mathcal{L}_{\mu_2+i\gamma} f_1)(\omega) = \sum_{\substack{\sigma(\tilde{\omega})=\omega \\ \tilde{\omega} \in \Omega_M}} e^{-h\tau(\tilde{\omega})} e^{-i\gamma h\tau(\tilde{\omega})} f_1(\tilde{\omega})$$

$$1 = \mathcal{L}_{\mu_2} 1 = \sum_{\substack{\sigma(\tilde{\omega})=\omega \\ \tilde{\omega} \in \Omega_M}} e^{-h\tau(\tilde{\omega})}$$

$$\Rightarrow \forall \omega \in \Omega_M, \quad e^{-i\gamma h\tau(\omega)} f_1(\omega) = f_1(\sigma(\omega))$$

Poniamo $F: (\Omega_M)_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$, $F(\omega, s) = f_1(\omega) e^{-i\gamma h s}$

$$F(\omega, \tau(\omega)) = f_1(\omega) e^{-i\gamma h\tau(\omega)} = f_1(\sigma(\omega)) = F(\sigma(\omega), 0)$$

Inoltre $(F \circ V_t)(\omega, s) = F(\omega, s+t) = f_1(\omega) e^{-i\gamma h s} \cdot e^{-i\gamma h t} = e^{-i\gamma h t} F(\omega, s)$
 $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \gamma = 0.$$

□

$Z^{\frac{\alpha}{2}}(\alpha)$ converge per $\text{Re}(\alpha) > 1$, ha un polo semplice in $\alpha=1$, ha un'estensione

enolitica e non-zero in un intorno di $\operatorname{Re}(\alpha)=1$.

Allora

$$\frac{1}{1-\alpha} + W(\alpha) = \frac{(Z^{\Phi}(\alpha))'}{Z^{\Phi}(\alpha)} = \frac{d}{d\alpha} \left(\log Z^{\Phi}(\alpha) \right) = \frac{d}{d\alpha} \log \left[\prod_{\gamma \in \mathbb{P}^0} (1 - e^{-\alpha h \ell(\gamma)})^{-1} \right]$$

$\downarrow$
 enolitica
 in $\operatorname{Re}(\alpha) \geq 1$

$$\begin{aligned} &= - \frac{d}{d\alpha} \sum_{\gamma \in \mathbb{P}^0} \log(1 - e^{-\alpha h \ell(\gamma)}) = + \frac{d}{d\alpha} \sum_{\gamma \in \mathbb{P}^0} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{e^{-\alpha h \ell(\gamma)m}}{m} \\ &= - \sum_{\gamma \in \mathbb{P}^0} \sum_{m=1}^{+\infty} h \ell(\gamma) e^{-\alpha h \ell(\gamma)m} = \\ &= - \int_0^{+\infty} e^{-\alpha h t} d \left(\sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{\gamma \in \mathbb{P}^0, m \ell(\gamma) \leq t} h \ell(\gamma) \right) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$
 Tes Tambien o
 Ikehara - Wiener

$$\psi(T) := \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{P}^0 \\ m \ell(\gamma) \leq T}} h \ell(\gamma) \sim e^{hT}$$

Allora

$$\psi(T) = \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{P}^0 \\ \ell(\gamma) \leq T}} \left\lfloor \frac{T}{\ell(\gamma)} \right\rfloor h \ell(\gamma) \leq hT \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{P}^0 \\ \ell(\gamma) \leq T}} 1 = hT \pi(T)$$

$$\Rightarrow \liminf_{T \rightarrow +\infty} \frac{hT \pi(T)}{e^{hT}} \geq 1.$$

Scelto $\xi \in (0, 1)$, si ha

$$\begin{aligned} \pi(T) &= \pi(\xi T) + \sum_{\xi T \leq \ell(\gamma) \leq T} 1 \leq \pi(\xi T) + \sum_{\ell(\gamma) \leq T} \frac{\ell(\gamma)}{\xi T} \\ &\leq \pi(\xi T) + \frac{\psi(T)}{\xi h T} \end{aligned}$$

$$h = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \log \pi(T) \Rightarrow \pi(\xi T) = o(e^{hT})$$

$$\Rightarrow \limsup_{T \rightarrow +\infty} \frac{\pi(T) h T}{e^{hT}} \leq \frac{1}{\xi}$$

Quindi

$$\frac{\pi(T)hT}{e^{hT}} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 1.$$

