

**Sistemi Dinamici**  
**Corso di Laurea in Matematica**  
**Compito del 20-02-2019**

**Esercizio 1. (10 punti)** Dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + y \\ \dot{y} = \mu + x^2 - y \end{cases}$$

con  $\mu \in \mathbb{R}$ ,

- (i) studiare al variare di  $\mu$  la stabilità lineare dei punti fissi del sistema;
- (ii) disegnare il ritratto di fase del sistema per  $\mu = 1$ .

**Esercizio 2. (10 punti)** Dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y^3 \\ \dot{y} = -(x^2 - 2x - 3)e^{-x} \end{cases}$$

- (i) dimostrare che si tratta di un sistema Hamiltoniano, e dire se è un sistema meccanico;
- (ii) disegnare il ritratto di fase del sistema.

**Esercizio 3. (10 punti)** Data la funzione  $f_a : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  definita da

$$f_a(x) = ax^2(1 - x^2)$$

con  $a \in (0, 4]$ ,

- (i) ponendo  $a^* = \frac{3}{2}\sqrt{3}$ , discutere il numero di punti fissi di  $f_a$  per  $a \in (0, a^*)$ , per  $a = a^*$ , e per  $a \in (a^*, 4]$ ;
- (ii) per  $a = a^*$ , determinare l'omega limite  $\omega(x)$  per ogni  $x \in [0, 1]$ .

## Svolgimento

**Esercizio 1.** Dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + y \\ \dot{y} = \mu + x^2 - y \end{cases}$$

con  $\mu \in \mathbb{R}$ ,

(i) studiare al variare di  $\mu$  la stabilità lineare dei punti fissi del sistema;

Cerchiamo innanzitutto i punti fissi del sistema al variare di  $\mu$ . Si tratta delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} -2x + y = 0 \\ \mu + x^2 - y = 0 \end{cases}$$

Si ottiene che ci sono tre casi:

$\mu > 1$  - non ci sono punti fissi;

$\mu = 1$  - c'è un unico punto fisso  $P = (1, 2)$ ;

$\mu < 1$  - ci sono due punti fissi  $Q_+ = (1 + \sqrt{1 - \mu}, 2 + 2\sqrt{1 - \mu})$  e  $Q_- = (1 - \sqrt{1 - \mu}, 2 - 2\sqrt{1 - \mu})$ .

Per studiare la stabilità lineare dei punti fissi, usiamo la matrice Jacobiana del campo di vettori

$$JF(x, y) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2x & -1 \end{pmatrix}$$

e consideriamo i diversi casi.

Per  $\mu = 1$ , per l'unico punto fisso  $P$  si ha

$$JF(P) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

che ha autovalori  $\lambda_1 = -3$  e  $\lambda_2 = 0$ , dunque è linearmente stabile. Tuttavia il punto  $P$  non è iperbolico, e la sola linearizzazione non è sufficiente a determinarne la stabilità non lineare, che verrà discussa nel punto (ii).

Per  $\mu < 1$ , per il punto fisso  $Q_+$  troviamo

$$JF(Q_+) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 + 2\sqrt{1 - \mu} & -1 \end{pmatrix}$$

che ha autovalori  $\lambda_{\pm} = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{9 + 8\sqrt{1 - \mu}}$ . Poiché  $\lambda_- < 0 < \lambda_+$  per ogni  $\mu < 1$ , il punto  $Q_+$  è un punto di tipo sella, quindi è instabile.

Per il punto fisso  $Q_-$  troviamo

$$JF(Q_-) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 - 2\sqrt{1 - \mu} & -1 \end{pmatrix}$$

che ha autovalori reali se  $9 - 8\sqrt{1 - \mu} \geq 0$ , ossia se  $\mu \geq -\frac{17}{64}$ , e autovalori con parte immaginaria non nulla se  $\mu < -\frac{17}{64}$ .

Nel primo caso, gli autovalori sono  $\lambda_{\pm} = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{9 - 8\sqrt{1 - \mu}}$ , e sono entrambi negativi per ogni  $\mu \in [-\frac{17}{64}, 1)$ , dunque  $Q_-$  è un nodo stabile (in particolare un nodo improprio stabile se  $\mu = -\frac{17}{64}$ ).

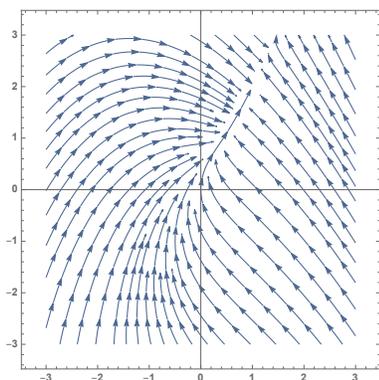
Nel secondo caso, gli autovalori sono  $\lambda_{\pm} = -\frac{3}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{-9 + 8\sqrt{1 - \mu}}$ , e dunque hanno entrambi parte reale negativa e parte immaginaria non nulla per  $\mu < -\frac{17}{64}$ , dunque  $Q_-$  è un fuoco stabile.

(ii) disegnare il ritratto di fase del sistema per  $\mu = 1$ ;

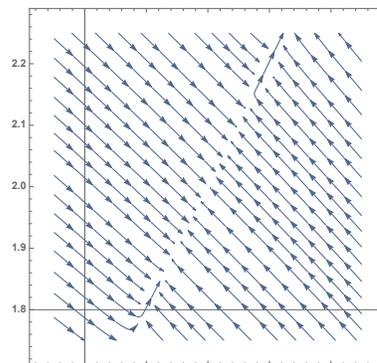
In questo caso c'è solo il punto fisso  $P$  per il quale non è stato possibile stabilire la stabilità dalla linearizzazione, in quanto punto fisso non iperbolico. Per capire che tipo di stabilità ha  $P$ , e disegnare il ritratto di fase, studiamo:

- il segno delle componenti del campo di vettori sul piano;
- la divergenza del campo  $= -3$ , da cui otteniamo la non-esistenza di orbite periodiche.

Da queste informazioni otteniamo che un possibile ritratto di fase è il seguente, in cui si vede in particolare che il punto  $P$  è instabile.



(a) Il ritratto di fase dell'es. 1.



(b) Zoom intorno al punto fisso

Figure 1

**Esercizio 2.** Dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y^3 \\ \dot{y} = -(x^2 - 2x - 3)e^{-x} \end{cases}$$

(i) dimostrare che si tratta di un sistema Hamiltoniano, e dire se è un sistema meccanico;

Il sistema è di tipo Hamiltoniano se esiste una funzione  $H(x, y)$  tale che

$$\begin{cases} \dot{x} = y^3 = \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) \\ \dot{y} = -(x^2 - 2x - 3)e^{-x} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) \end{cases}$$

Si ottiene che

$$H(x, y) = \frac{1}{4}y^4 + \int (x^2 - 2x - 3)e^{-x} dx = \frac{1}{4}y^4 + (3 - x^2)e^{-x}$$

Un sistema meccanico ha funzione hamiltoniana della forma  $H(x, y) = \frac{1}{2m}y^2 + V(x)$ , dunque non abbiamo un sistema meccanico.

(ii) disegnare il ritratto di fase del sistema;

Essendo il sistema di tipo Hamiltoniano e autonomo, la funzione  $H(x, y)$  è un integrale primo. Quindi gli insiemi di livello di  $H$  sono insiemi invarianti, e i punti fissi del sistema verificano  $\nabla H(x, y) = 0$ , e nel nostro caso quindi  $y^3 = 0$  e  $(x^2 - 2x - 3)e^{-x} = 0$ , per cui si ottengono i punti fissi  $P = (-1, 0)$  e  $Q = (3, 0)$ . Il termine  $y^4$  in  $H$  implica però che i punti fissi siano non-iperbolici, dunque la caratterizzazione in termini dell'energia potenziale  $V$  non è immediata.

Per lo studio del ritratto di fase è dunque indispensabile usare gli insiemi di livello di  $H$ , per il quale si possono ripetere gli argomenti qualitativi usati nel caso di sistemi meccanici. Si ottiene che  $P$  è un punto di tipo sella, le cui varietà locali stabile e instabile si intersecano in maniera non-trasversale in  $P$ , e  $Q$  è un punto di tipo centro.

Per un disegno più preciso, si tratta quindi di studiare le soluzioni dell'equazione

$$y^4 = 4(c + (x^2 - 3)e^{-x})$$

al variare di  $c \in \mathbb{R}$ , usando la simmetria rispetto all'asse  $x$ .

Per  $c < -6e^{-3} = H(3, 0)$ , gli insiemi di livello si trovano solo nella zona  $x < 0$ , e sono fatti da orbite per cui  $y \rightarrow \pm\infty$  per  $t \rightarrow \mp\infty$ .

Per  $c = -6e^{-3} = H(3, 0)$  si aggiunge solo il punto fisso  $Q$ .

Per  $c \in (-6e^{-3}, 0) = (H(3, 0), H(\sqrt{3}, 0))$ , gli insiemi invarianti sono composti da orbite dello stesso tipo di prima per  $x < 0$ , e da orbite chiuse intorno al centro  $Q$ .

Per  $c = 0 = H(\sqrt{3}, 0)$ , l'orbita con  $x > 0$  non è chiusa e verifica  $y \rightarrow 0$  per  $t \rightarrow \pm\infty$ .

Per  $c \in (0, 2e) = (H(\sqrt{3}, 0), H(-1, 0))$ , abbiamo sempre lo stesso tipo di orbite per  $x < 0$ , mentre per  $x > 0$  troviamo orbite che verificano  $y \rightarrow \pm(4c)^{\frac{1}{4}}$  per  $t \rightarrow \pm\infty$ .

Per  $c = 2e$ , i due tipi di orbite per  $x < 0$  e  $x > 0$  si "toccano" nel punto  $P$ , e sono le varietà stabile e instabile di  $P$ .

Infine per  $c > 2e$  si hanno orbite con condizioni iniziali  $(x_0, y_0)$  con  $y_0 > 0$  per cui  $y \rightarrow +\infty$  per  $t \rightarrow -\infty$  e  $y \rightarrow (4c)^{\frac{1}{4}}$  per  $t \rightarrow +\infty$ ; simmetricamente per  $y_0 < 0$ .

Il ritratto di fase risulta essere approssimativamente quello in figura 2.

**Esercizio 3.** Data la funzione  $f_a : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  definita da

$$f_a(x) = ax^2(1 - x^2)$$

con  $a \in (0, 4]$ ,

(i) ponendo  $a^* = \frac{3}{2}\sqrt{3}$ , discutere il numero di punti fissi di  $f_a$  per  $a \in (0, a^*)$ , per  $a = a^*$ , e per  $a \in (a^*, 4]$ ;

I punti fissi di  $f_a$  sono le soluzioni dell'equazione  $ax^2(1 - x^2) = x$ . Chiaramente  $x = 0$  è sempre una soluzione e dunque un punto fisso, ed eventuali altri punti fissi sono le soluzioni di  $ax(1 - x^2) = 1$ . Studiamo in maniera equivalente le soluzioni di  $g_a(x) = x^3 - x + \frac{1}{a} = 0$  in  $[0, 1]$ .

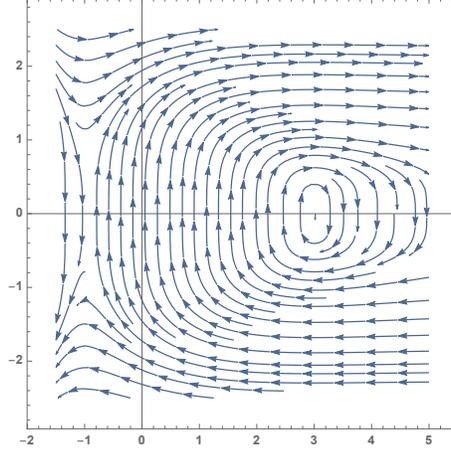


Figure 2: Il ritratto di fase dell'es. 2

Osserviamo che  $g_a(0) = g_a(1) = \frac{1}{a}$ , e da  $g'_a(x) = 3x^2 - 1$  ricaviamo che esiste un unico punto critico in  $[0, 1]$ , dato da  $\bar{x} = \sqrt{\frac{1}{3}}$ , che è un punto di minimo assoluto per  $g_a$  su  $[0, 1]$ . Avremo quindi che  $g_a(x) = 0$  ha due soluzioni se  $g_a(\bar{x}) < 0$ , una sola soluzione se  $g_a(\bar{x}) = 0$ , e nessuna soluzione se  $g_a(\bar{x}) > 0$ .

Per  $a = a^*$ , si trova  $g_{a^*}(\bar{x}) = 0$ , e dunque: per  $a \in (0, a^*)$ , non ci sono soluzioni per  $g_a(x) = 0$ , e quindi non ci sono altri punti fissi per  $f_a$ ; per  $a = a^*$ , c'è una sola soluzione per  $g_{a^*}(x) = 0$ , e quindi abbiamo un altro punto fisso per  $f_{a^*}$  in  $\bar{x}$ ; per  $a \in (a^*, 4]$ , ci sono due soluzioni per  $g_a(x) = 0$ , e quindi ci sono altri due punti fissi per  $f_a$ .

(ii) per  $a = a^*$ , determinare l'omega limite  $\omega(x)$  per ogni  $x \in [0, 1]$ .

Abbiamo visto che  $f_{a^*}$  ha due punti fissi in  $x_0 = 0$  e  $x_1 = \sqrt{\frac{1}{3}}$ . Studiando la stabilità dei punti troviamo, usando la derivata  $f'_{a^*}(x) = 2a^*x(1 - 2x^2)$ , che:  $f'_{a^*}(0) = 0$ , quindi  $x_0$  è un punto fisso attrattivo;  $f'_{a^*}(\sqrt{\frac{1}{3}}) = 1$ , quindi  $x_1$  non è iperbolico, ma studiando la derivata seconda di  $f_{a^*}$ , si ottiene  $f''_{a^*}(\sqrt{\frac{1}{3}}) < 0$ , quindi  $x_1$  è semi-stabile, in particolare attrattivo da destra e repulsivo da sinistra.

Questi comportamenti si vedono bene nel grafico di  $f_{a^*}$  rappresentato in figura 3. Possiamo quindi concludere che:

- se  $x \in [0, x_1)$ , si ha  $\omega(x) = \{x_0\}$ . Tutti i punti in  $[0, x_1)$  sono infatti nel bacino di attrazione di  $x_0$ ;
- se  $x = [x_1, y_1]$ , si ha  $\omega(x) = \{x_1\}$ . L'intervallo  $[x_1, y_1]$  costituisce infatti il bacino di attrazione di  $x_1$ , che si trova a destra del punto  $x_1$  semi-stabile, e il punto  $y_1$  soddisfa  $f_{a^*}(y_1) = x_1$  (si trova  $y_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}$ );
- se  $x \in (y_1, 1]$ , si ha  $\omega(x) = \{x_0\}$ . Infatti  $f_{a^*}(y_1, 1] = [0, x_1)$  e dunque si ricade nel primo caso.

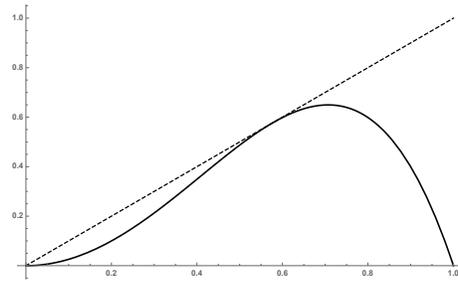


Figure 3: Il grafico di  $f_a^*$